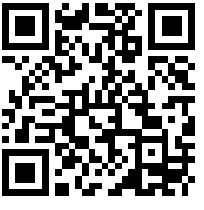
This is a reproduction of a library book that was digitized by Google as part of an ongoing effort to preserve the information in books and make it universally accessible.

Google™ books

https://books.google.com



Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

Linee guide per l'utilizzo

Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

+ *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.

+ *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.

+ *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.

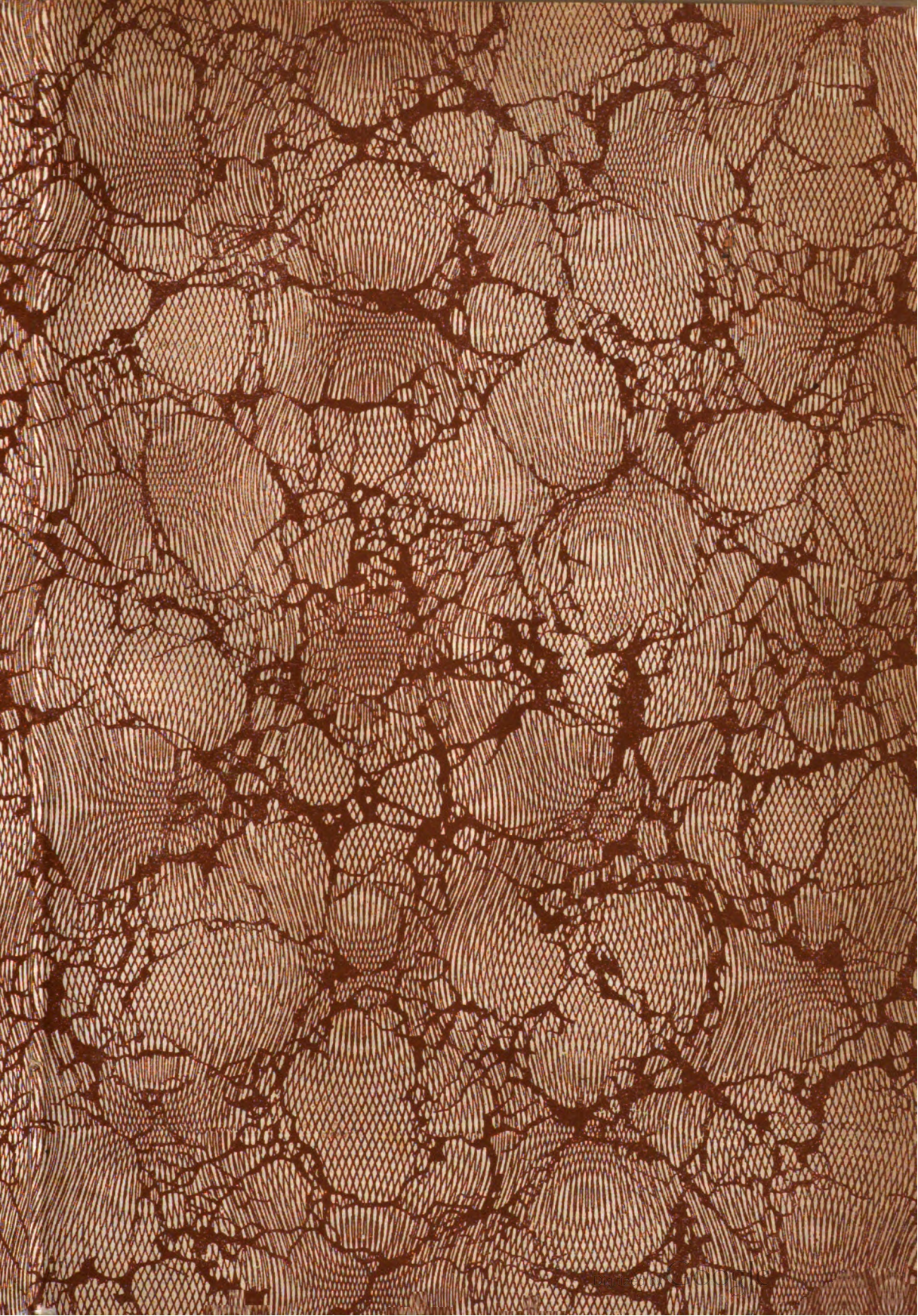
+ *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertati di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da `http://books.google.com`

VITTORIO EMANUELE

BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE
Periodici Italiani
394
ROMA



Digitized by Google

11, 394

BOLLETTINO

DI

BIBLIOGRAFIA E STORIA

DELLE

SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA

DI

GINO LORIA

ANNO VIII.

1905

TORINO
CARLO CLAUSEN
HANS RINCK SUCC.

Digitized by Google

TORINO - CARLO CLAUSEN - TORINO

C. BRUHNS

Direttore dell' Osservatorio e Professore di Astronomia in Lipsia

NUOVO MANUALE
LOGARITMICO - TRIGONOMETRICO

CON

SETTE DECIMALI

5.ª Edizione

L. 5,50.

E. T. KÖHLER

MANUALE
LOGARITMICO - TRIGONOMETRICO

CONTENENTE:

I Logaritmi volgari o di Brigg
di tutti i numeri fino a 10800 con sette decimali.
I Logaritmi di Gauss.
I Logaritmi delle Funzioni Trigonometriche
di dieci in dieci secondi
per i primi ed ultimi nove gradi del quadrante
e di minuto in minuto per gli altri gradi.
Le formole goniometriche ed altre tavole matematiche
che spesso occorrono nei calcoli

II.ª Edizione della Versione Italiana

L. 4.

Digitized by Google

BOLLETTINO

DI

BIBLIOGRAFIA E STORIA

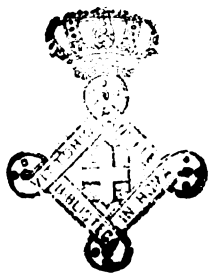
DELLE

SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA

DI

GINO LORIA



ANNO VIII.

1905

TORINO
CARLO CLAUSEN
HANS RINCK SUCC.

Digitized by Google

Proprietà letteraria

Genova. — Tipografia Sordomuti

Digitized by Google

INDICE

R. Marcolongo. Notizie sul « Discorso matematico » e sulla vita di Giulio Mozzi, p. 1-8.
R. Bonola. Un teorema di Giordano Vitale da Bitonto sulle rette equidistanti, p. 34-36.
G. Loria. « Unicuique suum », p. 65-67.
G. Vacca. Sulla matematica degli antichi cinesi, p. 97-102.

RECENSIONI ED ANNUNZI.

König. Allg. Theorie der alg. Grössen [G. Vivanti], p. 8-12. — **Tropfke.** Geschichte der Elementar-Mathematik [G. L.], p. 12-14. — Il Codice Atlantico [G. L.], p. 14-15. — **Castelnuovo.** Geometria analitica e projettiva. I. [U. Amaldi], p. 15-20. — **V. Bjerknes.** C. A. Bjerknes [G. L.], p. 20-21. — **Bruns.** Wiss. Rechnen [G. Vivanti], p. 21-22. — **Nielsen.** Cylinderfunktionen [G. Vivanti], p. 22. — **Salmon-Fiedler.** Kegelschnitte [G. L.], p. 23. — **Schur.** Analytische Geometrie [G. L.], p. 23. — **Grace** and **Young.** Invariants [G. L.], p. 23-24. — **Dassen.** Étude sur les quantités mathématiques [G. L.], p. 24. — **Teixeira.** Obras I [R. Marcolongo], p. 25-26. — **Schläfli.** Theorie der vielf. Kontinuität [G. L.], p. 26-27. — Annuaire publié per le Bureau des Longitudes, p. 27. — Oeuvres de Laguerre. II [G. L.], p. 37-38. — Correspondance d'Hermite et Stieltjes. I [G. L.], p. 38-39. — **G. Vivanti.** Théorie des groupes [U. Amaldi], p. 39-42. — **Fuchs.** Werke. I [G. L.], p. 42-43. — **Burali-Forti.** Lezioni di geometria metrico-proiettiva [G. Vacca], p. 43-46. — **Fiedler.** Darstellende Geometrie I [G. L.], p. 46. — **Classen.** Elektrizität und Magnetismus [A. Garbasso], p. 46-49. — **Gibson.** Treatise on Graphs [G. L.], p. 50. — **Poggendorff.** Handwörterbuch. IV [G. L.], p. 50. — **Ahrens.** Scherz und Ernst [G. L.], p. 51. — **Cesàro.** Alg. Analysis und Differentialrechnung [G. Vivanti], p. 51-52. — **Sylvester.** Collected Papers. I [G. L.], p. 53. — **Lejeune-Dirichlet.** Bestimmte Integrale [G. Vivanti], p. 53-55. — **Bardey.** Sammlung [G. L.], p. 55. — **Fort** und **Schlömilch.** Analytische Geometrie [G. L.], p. 55-56. — **Séguier.** Groupes finis [G. Vivanti], p. 56-57. — **Tannery.** Introduction à la theorie des fonctions, I [F. Giudice], p. 57-60. — **Königsberger.** Jacobi [G. L.], p. 60-61. — **Holzmüller.** Vorbereitende Einführung in die Raumlehre [G. L.], p. 61-62. — **Marcolongo.** Meccanica [T. Levi-Civita], p. 67-69. — **Mach.** La mécanique [G. L.], p. 69-70. — **Schlömilch.** Übungsbuch. I. Tl. [G. L.], p. 70. — **Rouse Ball.** Storia delle matematiche [R. Bonola], p. 70-72. — **Netto.** Elementare Algebra [G. L.], p. 72-73. — **Schlesinger.** Differentialgleichungen [G. L.], p. 73. — **Pincherle.** Analisi algebrica [G. L.], p. 73-74. — **Dumont.** Géométrie du 3.e ordre [G. L.], p. 74. — **Halsted.** Rational Geometry [G. Vailati], p. 74-77. — **Macfarlane.** Bibliography of quaternions [G. L.], p. 77-78. — Atti del Congr. internaz di sc. storiche [G. Vivanti], p. 78-81. — **Runge.** Theorie und Praxis der Reihen [G. L.], p. 81-82. — **Serret.** Differential-und Integralrechnung [G. L.], p. 82. — **Schussler.** Orthogonale Axonometrie [G. L.], p. 82-83. — **Schilling.** Ueber die Anw. der darstell. Geometrie [G. L.], p. 83-84. — **Bortolotti.** Calcolo degli infinitesimi [G. Vivanti],

Digitized by Google

p. 84-85. — **Stolz-Gmeiner.** Funktionentheorie [G. Vivanti], p. 85. — **Vries.** Zentralprojektion [G. L.], p. 85-86. — **Dedekind.** Stetigkeit und irrationale Zahlen [G. L.], p. 86. — **Mandart.** Géometrie analitique [G. L.], p. 86-87. — **Liebman.** Nichteuklidische Geometrie [G. L.], p. 102-103. — **Poincaré.** Wissenschaft und Hypothese [G. L.], p. 103-104. — **Poincaré.** La valeur de la scieuce [G. L.], p. 104-105. — **Meyer.** Integralrechnung [G. Vivanti], p. 105-107. — **Jahnke.** Vektorenrechnung [G. L.], p. 107-108. — **Doll und Nestle.** Praktische Geometrie [G. L.], p. 108. — **Lindelöf.** Calcul de résidus [G. Vivanti], p. 108-109. — **Schubert.** Auslese. I. [G. L.], p. 109-110. — **Amodeo.** Geometria projettiva [C. Ciani], p. 110-114. — Verh. des III. intern. Mathem.-Kongresses [G. L.], p. 114-118. — **Pizzetti.** Geodesia [A. Viterbi], p. 118-126. — **Mansion.** Calcul des probabilités [G. L.], p. 126. — **Rouse Ball.** Mathematical Recreations [G. L.], p. 127.

NECROLOGIO.

Paolo **Tannery** (G. L.), p. 27-30.

PROGRAMMI E RIASSUNTI DI CORSI UNIVERSITARI.

Università di Pavia. Corsi di Analisi superiore tenuti dal Prof. Pascal, p. 87-93.

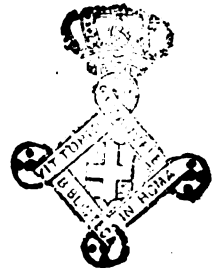
NOTIZIE.

Storia della Tecnica. — Abh. zur Gesch. der Math. — Pubblicazioni recenti sulla storia della matematica. — Biblioteca scolastica. — Encyclopedie des sciences mathématique pures et appliquées. — Tema proposto dall'Accademia di Madrid per l'anno 1906, p. 30-32.

Medaglia Guccia. — I premi dell'Istituto di Francia. — Indice generale degli Annali di matematica. — Monumento a Vega. — Matematica dei Giapponesi. — Tema proposto dall' Accademia Danese, p. 62-64.

Guido Hauck. — A. Comte e la storia delle scienze. — Biblioteca scolastica. — Concorsi a premi. — I sogni e l'ispirazione matematica. — Per gli amatori di ritratti. — Pubblicazioni recenti sulla storia delle matematiche — Un'opera in corso di pubblicazione. — Galileo ed il concetto moderno d'infinito. — Una bibliografia delle curve algebriche. — Modelli di matematica, p. 92-96.

G. Salmon. — Mathem. und naturwiss. Berichte aus Ungarn. — Il Congresso di filosofia. — Riproduzioni diplomatiche di classici, p. 127-128.



Digitized by Google

ANNO VIII. GENNAIO, FEBBRAIO E MARZO 1905.

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA
E STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA DI

GINO LORIA

Editore: **Carlo Clausen, Hans Rinck** Succ. Torino — Del *Bollettino* si pubblicheranno ogni anno quattro fascicoli di almeno 32 pag. — Prezzo d'abbonamento annuo: Per l'interno L. **6**, per l'estero Fr. **7.50**. Numeri separati L. **2** caduno. Gli articoli da inserirsi si mandino al *Prof. G. Loria*, Università di Genova.

SOMMARIO

R. MARCOLONGO. *Notizie sul « Discorso matematico » e sulla vita di Giulio Mozzi.*
Recensioni ed annunzi: KONIG, *Allg. Theorie der alg. Grössen* [G. Vivanti]. — TROPFKE, *Geschichte der Elementar-Mathematik* [G. L.]. — *Il Codice Atlantico* [G. L.]. — CASTELNUOVO, *Geometria analitica e projettiva* I [U. Amaldi]. V. BJERKNES, *C. A. Bjerknes* [G. L.]. — BRUNS, *Wiss. Rechnen* [G. Vivanti]. — NIELSEN, *Cylinderfunktionen* [G. Vivanti]. — SALMON - FIEDLER, *Kegelschnitte* [G. L.]. — SCHUR, *Analytische Geometrie* [G. L.]. — GRACE and YOUNG, *Invariants* [G. L.]. — DASSEN, *Etude sur les quantités mathématiques* [G. L.]. — TEIXEIRA, *Obras* I [R. Marcolongo]. — SCHLÄFLI, *Theorie der vielf. Kontinuität* [G. L.]. — *Annuaire publié per le Bureau des Longitudes.*
Necrologio: P. TANNERY di G. Loria.
Notizie: Storia della Tecnica. — Abh. zur Gesch. der Math — Pubblicazioni recenti sulla storia della matematica. — Biblioteca scolastica. — *Encyclopedie des Sciences mathematiques pures et appliquees.* — Tema proposto dall'Accademia di Madrid per l'anno 1906.

NOTIZIE SUL « DISCORSO MATEMATICO » E SULLA VITA DI GIULIO MOZZI

NOTA DI R. MARCOLONGO.

Il Giorgini (1) è stato, credo, il primo a richiamare l'attenzione dei matematici su Giulio Mozzi, a cui è dovuto il teorema fondamentale della cinematica dei sistemi rigidi; cioè che ogni moto istantaneo si riduce ad altri due, uno di rotazione, l'altro di traslazione lungo lo stesso asse (2).

(1) Vedi l'Appendice della pregevole memoria: *Intorno alle proprietà geometriche dei movimenti di un sistema di forma invariabile.* Mem. Soc. ital. d. Scienze 21, pp. 1-46 — Appendice: ibidem, pp. 47-56 (1836). L'Appendice porta la data del 1832. — Vedi ancora l'articolo di G. Loria: *Intorno a la vita e le opere di Gaetano Giorgini.* Giorn. di Battaglini. 31, 1895.

(2) *Discorso matematico sopra il rotamento dei corpi* del Cav. Giulio Mozzi, Patrizio fiorentino. In Napoli MDCCLXIII. Nella Stamperia di Donato Campo. Con licenza de' Superiori.

Digitized by Google

Lo stesso teorema fu successivamente ritrovato dal Cauchy nel 1827 (1); dallo Chasles (2), che lo estese al moto di un corpo rigido tra due posizioni finite, e infine dallo stesso Giorgini (3); il quale non mancò di osservare, giustamente (mem. citata), una inesattezza in cui è caduto il Mozzi. Questi infatti comincia il citato *Discorso* dimostrando (Lemma I, pag. 1) che se un corpo rigido ha un punto fisso, il suo moto istantaneo si riduce ad una rotazione intorno ad un asse uscente dal punto fisso; ma la dimostrazione, poggiando sul dato erroneo che il movimento del corpo sia determinato da quello di un altro punto solo, non può certamente ritenersi per giusta. Ma il teorema non solo è esattissimo; ma, ai tempi in cui scriveva il Mozzi, non era neppur nuovo, essendo già stato dimostrato analiticamente sin dal 1749 dal d'Alembert (4) e poscia da Euler (5); forse il Mozzi è stato, da ciò, indotto a tentarne una dimostrazione geometrica. All'infuori però di questa menda, la dimostrazione del teorema fondamentale (Coroll. IV, pag. 5) è chiara ed esatta; anzi, in fondo, non è diversa da quella che si è soliti esporre anche ora (6). Ma, se io non m'inganno, la memoria del Mozzi non è solamente importante dal punto di vista della Cinematica; perchè costituisce un vero trattato della Statica e Dinamica dei corpi rigidi, liberi o vincolati, e precisamente corrispondente a quella parte che riguarda le forze di percossa; tanto più notevole se si riflette che il *Discorso* è uscito alla luce due anni prima del famoso trattato di Euler (7); e che, sebbene il Mozzi non faccia esplicitamente uso dell'importante concetto di momento d'inerzia e di assi principali d'inerzia, introdotti

---

Il *Discorso* è dedicato al R. P. D. Paolo Frisi; contiene, oltre la dedica, una introduzione, pp. 1-5 in cui è spiegato lo scopo del *Discorso:* questo occupa pp. 1-95 e due tavole di figure.

Paolo Frisi barnabita, dotto matematico, astronomo, idraulico, nato e morto a Milano [1728-1784], fu dal 1756 al 64 professore nello Studio di Pisa.

(1) *Sur les mouvements que peut prendre un système invariable,* etc. Exerc. de Mathém. Anc. Exerc. Seconde Année, 1827. Oeuvres compl. 7 (2), pag. 120.

(2) *Note sur les propriétés générales de deux corps,* etc. Bull. de Férussac 14; 1830.

(3) Mem. cit. Appendice.

(4) *Recherches sur la préces. des équinoxes.* Paris, 1749; pag. 83. Quest'opera è citata spesso dal Mozzi nel *Discorso.*

(5) *Découverte d'un nouveau principe de Mécanique.* Mém. de l'Acad. de Berlin, 1750; pag. 202. Euler stesso assai più tardi estese il teorema al caso del trasporto di due posizioni di uno stesso corpo rigido avente un punto fisso: *Formules generales pro translatione,* etc. Novi Comm. Acad. Petrop. 20; pag. 202; 1775.

(6) Non parmi dunque del tutto esatto, come potrebbe credersi da ciò che scrive il Giorgini, ciò che è scritto nella Encyklopädie der mathem. Wiss. IV, 2 - Geometr. Grundleg. der Mechanik eines starren Körpers - pag. 143; Fussnote 29 « *Der Beweis Mozzi's ist aber nicht richtig* ».

(7) *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum,* etc. Rostockii, 1765.

Digitized by Google

già nella scienza da Segner (1); i suoi risultati sono assai più espliciti e più completi di quelli che, con più largo e sapiente apparato di formule, ha dedotto lo stesso Euler (2).

Credo quindi non del tutto inutile riassumere i principali risultati del Mozzi; accennare alla coincidenza con quelli che, più direttamente, fornisce la moderna analisi; e spero non fare opera vana se riuscirò a togliere da un immeritato oblio un'operetta, oggi quasi dimenticata, e il nome di un matematico italiano, che ebbe parte diretta e non indifferente nelle vicende del proprio paese, ed è senza dubbio degno di essere onorevolmente ricordato.

***

Dopo il teorema fondamentale di Cinematica, un'altra cosa colpisce subito il lettore del *Discorso*. In questo infatti comincia a comparire, ancora assai timidamente invero, il concetto di coppia; che solo ben quarant'anni più tardi doveva fare solennemente il suo ingresso nella scienza per opera di Poinsot. Il Mozzi invero non solo considera il sistema di forze distinto poi col nome di coppia; ma nei lemmi che precedono la parte dinamica del *Discorso* è facile riscontrare nettamente alcuni casi particolari della teoria classica del Poinsot. Così, nei lemmi II e III, pp. 6, 12, egli considera l'effetto di una coppia su di una forza contenuta nello stesso piano e normale alle forze della coppia; nel Coroll. VII, pp. 10-11, trasforma una coppia in un'altra equivalente, nel caso che le forze siano parallele e contenute in uno stesso piano o in piani paralleli; e nel lemma V, pag. 17, trasforma una coppia in un'altra, girando le forze della prima intorno ai loro punti d'applicazione.

Il Mozzi giunge ai risultati giusti e ben noti, e che chiaramente enuncia, quasi sempre in doppio modo: o valendosi dei principii rigorosi della composizione e decomposizione delle forze; o, in modo meno chiaro e rigoroso, con un passaggio al limite considerando la coppia come una forza nulla agente a distanza infinita.

Queste considerazioni preliminari gli permettono, come subito si comprende, di risolvere due problemi che costituiscono, in sostanza, lo scopo di questa seconda parte del *Discorso;* cioè: date due forze, una normale, l'altra parallela ad un dato piano, trasformarle in altre due equivalenti, una normale, l'altra giacente nel piano (Lemma IV, pag. 13); e dato un sistema qualunque di forze, ridurle a due equi-

(1) *Specimen theoriae turbinum*. Hallae, 1755.

(2) *Theoria motus*, etc. Cap. IX. « De prima motus generatione in corporibus rigidis »; pag. 238.

Digitized by Google

valenti una perpendicolare, l'altra contenuta in un piano scelto a piacere (Coroll. IX, pag. 18) (1).

***

Tutta la parte dinamica del *Discorso* riguarda, come si è detto, quel capitolo che oggi si chiama delle forze istantanee e di percossa (2) ed è notevole la generalità raggiunta dal Mozzi. Infatti egli si propone subito (Problema 1.°, pag. 22) il quesito, che enunciamo col linguaggio moderno: data la forza di percossa, determinare il moto istantaneo elicoidale in un sistema rigido libero.

Il Mozzi esprime che vi ha equilibrio tra la forza di percossa volta in senso contrario e le forze che sono prodotte nel primo istante di moto; cioè le quantità di moto dei singoli elementi di massa (impulsi). La riduzione di queste, eseguita con quei metodi geometrici la cui perfezione doveva assai più tardi esser raggiunta dal Poinsot, è grandemente agevolata dalla considerazione dell'asse di moto elicoidale, dal Mozzi chiamato *asse spontaneo di rotazione* (pag. 6). Egli stabilisce quindi sei equazioni, alle quali si giunge brevemente così.

Assumiamo per asse x l'asse istantaneo di moto elicoidale; per asse y la normale condotta a questo pel centro di massa del corpo. Diciamo X, Y, Z, le componenti della forza di percossa; x_0, y_0 le coordinate del punto in cui essa colpisce il piano xy. Poichè le coordinate del moto istantaneo sono (u, o, o, p, o, o) e la velocità di un punto qualunque ha per componenti u, $-pz$, py si deduce che le componenti dell'impulso sono: Mu, o, $Mp\eta$; e quelle della coppia d'impulso: Ap, $-pC'$, $-Mu\eta - pB'$; in cui η è la y del centro di massa; M la massa totale; A, ... i momenti e i prodotti d'inerzia. Teoremi ben noti ci dànno quindi le equazioni

$$Mu = X \quad , \quad Y = o \quad , \quad Mp\eta = Z$$

$$Ap = y_0 Z \quad , \quad pC' = x_0 Z \quad , \quad Mu\eta + pB' = y_0 X;$$

che coincidono con quelle date dal Mozzi o a quelle agevolmente si riducono, nell'ordine seguente: II, VI, I, IV, III, V, pag. 30.

Questi risultati così generali permettono agevolmente al Mozzi di rettificare una inesattezza del Bernoulli; il quale asserisce, nell'opera già citata, che l'asse istantaneo è normale al piano condotto pel centro di massa e per la forza di percossa in un moto puro di rota-

(1) Anche Euler, ma forse con minor eleganza del Mozzi, si è occupato della riduzione a due forze sole: Op. cit , pag. 239.

(2) Cominciato da Giov. Bernoulli. Opera. 4. pag. 265; 1742.

Digitized by Google

zione; mentre supponendo $X = x_0 = o$, dalle equazioni del Mozzi si deduce bensì $u = o$, ma inoltre $C' = B' = o$ (Coroll. XII, pag. 31,32); equazioni di cui il Mozzi dà l'interpetrazione cinetica: Teorema I, pag. 56; Problema VII, pag. 57. Ed a mostrar meglio la svista del Bernoulli, il Mozzi si ferma a considerare un esempio semplicissimo in cui le precedenti condizioni non sono soddisfatte per tutti gli assi (Problema II, pag. 33).

La risoluzione poi del problema generale in cui le percosse sono parecchie si fa valendosi della riduzione a due forze uniche tra loro normali; le formule ottenute permettono risolvere il problema reciproco (Problema VI, pag. 50) e infine, più generalmente, di trovare le forze da imprimere ad un corpo che si muove in modo prestabilito, perchè risulti un altro movimento pur noto (Problema VIII, pag. 59).

Il Mozzi, a verifica dei risultati conseguiti, dà un nuovo metodo di soluzione, ricercando il moto che imprimerebbe al sistema rigido ciascuna percossa e componendo poscia i singoli movimenti ridotti a due soli movimenti: uno di traslazione e l'altro di rotazione (pp. 41-50).

Nota, in seguito, come i principii esposti potrebbero dare le equazioni del moto di un corpo rigido. Basterebbe infatti considerare tre punti del sistema e le loro nove coordinate e poscia il moto del sistema in due istanti successivi; ma l'A., assai prudentemente, si limita soltanto a descrivere il procedimento; la cui complicazione, quando si voglia tradurre in atto, è invero grandissima. Quanta diversità coi metodi così eleganti già dati da Euler nella memoria: *Découverte*, etc.; e con quelli elegantissimi della « Theoria motus »!

Nell'ultima parte del *Discorso* il Mozzi risolve il problema generale I, III, nel caso dei corpi rigidi vincolati. È subito da notare l'applicazione del principio di d'Alembert alle forze istantanee e che enuncia così. Se A e B sono le forze risultanti di un sistema di forze (percosse); a e b quelle che risultano dal movimento reale che il corpo, comunque vincolato, acquista nel primo istante di moto (forze d'impulso o quantità di moto) e supponendo che il corpo parta dalla quiete; allora il sistema delle forze $A, B, -a, -b$ è in equilibrio. (Lemma VII, pag. 64).

I vincoli del sistema considerati dal Mozzi sono: punto fisso; asse fisso lungo il quale il corpo può scorrere e ruotare; piano fisso a contatto col corpo. Dopo aver considerate le condizioni di equilibrio di un corpo avente un asse fisso e notato che le coppie contenute in piani passanti per l'asse non turbano l'equilibrio (proprietà che il Mozzi dimostra in un caso particolare, Teorema III, pag. 67; ma che i teoremi, da lui precedentemente esposti, gli permetterebbero di enunciare in generale) il Lemma VII, come ora è ben noto, dà il mezzo di assegnare la velocità istantanea di rotazione del corpo; la

Digitized by Google

quale, nel caso di un asse fisso, risulta proporzionale al momento delle forze di percossa rispetto l'asse (Problema IX, pag. 68). Finalmente i problemi X e XI, pp. 71 e 77 trattano il caso del corpo con un punto fisso o a contatto con un piano fisso; e gli ultimi (XIII, XIV, XV) risolvono i problemi dell'urto pei corpi duri (anelastici).

***

Il rapido esame di questo *Discorso* proverà, spero, quanto avevo in principio accennato, cioè la sua notevole importanza. La forma sintetica dei risultati raggiunti; la loro generalità avrebbero invero meritato che una tal memoria, anche a prescindere dal notevolissimo contributo arrecato alla cinematica dei corpi rigidi, non fosse passata, per quanto io sappia, completamente inosservata. Solo settanta anni dopo la sua pubblicazione un illustre italiano, e solo incidentalmente, la toglieva dall'immeritato oblìo per uno solo dei suoi risultati!

Le nostre divisioni, le nostre sventure si ripercuotevano anche sulla vita scientifica italiana del secolo XVIII; e molto più tardi, al 1806, il Delambre apertamente confessava che « i matematici italiani non sono molto considerati » (1).

Chiudiamo questa breve nota dando alcune notizie sulla vita del Mozzi che, spero, non riusciranno prive d'interesse (2).

Giulio Giuseppe Mozzi del Garbo nacque in Firenze ai 23 di febbraio del 1730 da Pier Giannozzo e da Isabella Barbolani da Montauto. In patria ebbe buona educazione letteraria; mostrò subito grande disposizione per la poesia e diè alle stampe un suo *Inno al Sole* e l'*Ode sopra la noia* (3). Datosi allo studio delle scienze e in particolare della Fisica, stampò nel 1765 il notevole *Discorso* di cui si è parlato,

---

(1) E. BORTOLOTTI. *Influenza dell'opera matematica di P. Ruffini*, ecc. Modena, 1902, p. 27.

(2) Le togliamo in parte dalla Necrologia del Mozzi pubblicata nel Giornale del Dipartimento dell'Arno, N.° 50, 27 aprile 1813, che contiene però qualche inesattezza. Ci fu gentilmente comunicata dal Prof. Chilovi della Nazionale di Firenze. Altre numerose notizie sul Mozzi sono tratte dall'opera documentata di ANTONIO ZOBI: *Storia civile della Toscana dal 1737 al 1848*. Firenze, 1851.

Il Mozzi non è citato da nessuno degli storici delle matematiche, nè il suo nome figura nel Dizionario Bibliografico del Poggendorff. Il solo De La Lande nel famoso: *Voyage en Italie etc.* 3.ème édition - Genève 1790, alla pagina 367 del tomo secondo in cui dà « la liste, par ordre alphabétique des gens de lettres qui se trouvoient à Florence en 1783 » dice: « M. le chevalier J. Mozzi (est connu) pour la philosophie, les mathématiques et la poësie ».

(3) Non ho potuto trovarne traccia; non è improbabile che, secondo il costume di quel tempo in cui si mise in poesia la filosofia di Newton, l'ottica, l'algebra, ecc., l'*Inno al Sole* sia una di quelle poesie scientifiche di cui abbonda il secolo XVIII. Il Bertana nel suo interessante libro: *L'Arcadia nella Scienza*, Parma 1890, non ne fa cenno.

Digitized by Google

rimasto, forse, la sola sua produzione scientifica. Dopo un viaggio all'estero sposò Luisa Bartolini Salimbeni; ebbe due figliuoli di cui uno solo superstite alla sua morte.

Sotto il felice reggimento del Granduca Leopoldo (1765-1790), che volle il Mozzi tra i dotti trattenitori dei R. R. Arciduchi, l'Accademia Fiorentina, quella della Crusca e degli Apatisti furono fuse in una sola Accademia Fiorentina, unita alla Biblioteca Magliabechiana, ove si adunava ed esercitava le sue funzioni (luglio 1783). L'Accademia fu solennemente inaugurata nel 1784 e il Mozzi « *uomo d'ameno ingegno e di belle cognizioni* » ne fu il presidente; carica che conservò poi sino alla morte (1). Nè sotto Leopoldo, nè sotto il successore Ferdinando III ebbe il Mozzi ingerenza negli affari di Stato; benchè fosse tra i pochi che insieme col Fossombroni ed il Pignotti godessero la fiducia del Manfredini, ministro di Ferdinando e per il suo spirito, gusto e brio fosse ritenuto capace di coprire i più difficili impieghi (2).

Scacciati, dopo la prima occupazione del 97, i francesi, il governo fu affidato al Senato ed il Mozzi, di idee liberali dovè patire con altri, nella susseguente reazione, la detenzione in casa. Ricorse al Granduca; fu liberato e tornò a godere delle franchigie senatoriali (3) nel 1799. Tornati, dopo Marengo, i francesi, il Mozzi fu allontanato dalla cosa pubblica; anzi, sotto il governo triumvirale, nel 1801, auspice Felice Fontana, essendosi tentato di rinnovare l'antica Accademia del Cimento, il Mozzi non fu nemmeno compreso tra i soci (4).

Destinata la Toscana all'infante di Parma, Loduvico di Borbone, col trattato di Luneville, questi prese il nome di Loduvico I.° re d'Etruria (marzo 1801); ristabilì il Consiglio di Stato ed il Mozzi fu nominato « ministro delle relazioni straniere e primo direttore dei superiori dicasteri » (istituiti già da Leopoldo); e questo ufficio il Mozzi tenne fino alla fine del regno d'Etruria, anche quando il ministero subì riduzioni e trasformazioni (5). Ma dal ministero restarono fuori i migliori tra cui D. Neri Corsini e Vittorio Fossombroni. « Il solo Mozzi, dice lo storico Zobi, pertanto fra i nuovi eletti al ministero, sarebbe stato in grado di adempiere gl'incarichi, se avesse avuti colleghi sufficienti e sperimentati » (6).

---

(1) Zobi, libr. cit. 2, pag. 333. Tale fusione suscitò, com'è noto, l'ira dell'Alfieri che scrisse il sonetto: *L'idioma gentil sonante e puro.*

(2) Zobi, l. c. 3, pag. 138; nota 13.

(3) Ibidem, pag. 383; nota 25.

(4) Il Decreto relativo e l'elenco dei soci sono stati pubblicati dal Zobi nella Appendice al Tomo 3.° della sua storia: pp. 213-214. L'Accademia fu solennemente inaugurata il 16 marzo 1801 presenti i triumviri ed i generali Murat e Berthier. Ma non ebbe favore nè presso i quadrumviri succeduti ai triumviri, nè presso il re d'Etruria.

(5) Loc. cit., pp. 490 e 624.

(6) Loc. cit., pag. 491.

Digitized by Google

Il Mozzi già vecchio non poteva esser certo un ministro energico di quel travagliato regno e peggio della reggenza di Maria Luisa; tanto più che egli era inviso ai rappresentanti francesi e tentava alla meglio di opporsi al famoso blocco continentale (1).

Se non potè scongiurare il triste rapimento della Venere medicea (2), si deve però al Mozzi il riordinamento della Università di Pisa; e la ferma opposizione ai voleri della reggente per la riammissione dei gesuiti in Toscana (3). Alla fine del regno (1807) il Mozzi tornò a vita privata.

Finalmente quando al 1808, sul modello dell'Accademia di Francia, fu ampliata l'Accademia Fiorentina e divisa in tre Classi: del Cimento, della Crusca e del Disegno, il Mozzi fu nominato presidente delle tre classi e accademico per la classe della Crusca (4). Nel 1812 fu insignito della Gran Croce della Riunione. Morì in Firenze ai 16 di aprile del 1813.

Novembre, 1904.

R. MARCOLONGO.

RECENSIONI ED ANNUNZI

J. KONIG. *Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Groessen*. Aus dem Ungarischen übertragen vom Verfasser. Leipzig, Teubner, 1903. X-561 p., 8.° [Prezzo Mk. 18].

Fare una recensione di questo libro, che dia ai lettori una sufficiente idea del suo contenuto, è cosa impossibile, a meno di entrare in troppo minuti particolari. Per definirlo in poche parole, può dirsi che esso è un commento alla classica *Festschrift* di Kronecker; un commento però, che non si limita ad illustrare i punti difficili, ma completa, generalizza, riduce a forma sistematica l'intera teoria.

(1) Zobi, loc. cit., pp. 503, 632. L'incaricato di Francia, il D'Aubusson dipingeva con disprezzo il Mozzi chiamandolo « astronomo caduto dall'osservatorio al gabinetto » e asserendo che la somma delle cose era nelle mani di un intrigante, del Selvatico, che fu poi allontanato. E Napoleone diceva apertamente: « La regina è troppo giovane, ed il ministro Mozzi è troppo vecchio per governare a dovere il Regno », cioè secondo i suoi voleri. Vedi la conferenza di E. Melchior de Vogüe « *Il regno d'Etruria* » nella « Vita italiana durante la Rivoluzione francese e l'impero » p. 301.

(2) Zobi, loc. cit. 3. Libro IX. Cap. VIII, § 4. Appendice, pp. 243-245.

(3) Ibidem, pag. 531.

(4) Ibidem, pag. 348 dell'Appendice.

Digitized by Google

Come parecchie altre teorie matematiche (esempio quelle dei numeri negativi, frazionari, irrazionali, complessi), anche quella dei numeri e delle funzioni algebriche deve il suo sviluppo alla impossibilità di risolvere, in certi casi, un problema. Due numeri ordinari ammettono sempre un massimo comun divisore; cioè esiste, e può trovarsi con una serie finita di operazioni, un numero ben determinato, che divide i due numeri ed è multiplo di ogni loro divisore comune. Consideriamo ora, invece dell' insieme dei numeri interi, l'insieme dei numeri della forma:

$$\beta = b_0 + b_1 \alpha + b_2 \alpha^2 + \ldots + b_{n-1} \alpha^{n-1},$$

dove le b sono numeri interi e α è una radice dell' equazione algebrica irriducibile a coefficienti interi:

$$(1) \qquad x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0.$$

Può avvenire, anche per equazioni (1) di forma molto semplice, che, dati due numeri β, non se ne possa assegnare un terzo avente rispetto ad essi le proprietà caratteristiche del massimo comun divisore. Questo fatto si collega strettamente con un altro non meno importante. Dato, nel campo dei numeri ordinari, un numero primo, se il prodotto di due numeri è divisibile per esso, lo è almeno uno dei fattori. Al contrario nei campi di numeri definiti da certe equazioni (1) un numero non decomponibile può dividere un prodotto senza dividere alcuno dei fattori, e però un numero può essere decomponibile in fattori primi in più modi. Come procedere per far sparire queste differenze essenziali esistenti tra l' aritmetica ordinaria e quella di certi campi algebrici? La questione si presentò per la prima volta a Kummer, in un caso particolare. Egli mostrò come, estendendo il campo considerato mediante l' *aggiunzione* di certi numeri non appartenenti ad esso, da lui (forse non molto felicemente) chiamati *numeri ideali*, sussistano nel nuovo campo ampliato le leggi ordinarie dell' aritmetica. Dedekind estese a campi qualunque i risultati di Kummer, ponendoli nello stesso tempo sotto forma alquanto diversa. Egli chiamò, sostantivamente, *ideali* (*) certi aggregati di numeri di un dato campo, opportunamente definiti; e dimostrò che, se si dice un ideale divisibile per un altro quando i suoi elementi sono tutti contenuti in questo, le leggi ordinarie della divisibilità valgono anche per gli ideali.

Kronecker ha seguito una via differente. Importa notare che le ricerche del grande analista berlinese hanno un fine assai più filosofico

(*) Questa denominazione è giustificata dal fatto che un ideale è l' insieme di tutti i numeri del campo considerato che sono divisibili per un medesimo numero ideale.

Digitized by Google

e una portata assai più ampia. Egli infatti si è proposto di far vedere che tutta l'analisi può svolgersi in base al solo concetto di numero intero e mediante l'uso delle operazioni aritmetiche applicate un numero finito di volte, quindi senza l'introduzione degli irrazionali. A tale scopo egli amplia il campo dei numeri razionali aggiungendo ad esso le funzioni intere a coefficienti razionali di una o più variabili, e fa vedere, in primo luogo, come per questa via si giunga ad una definizione puramente aritmetica — cioè indipendente dai concetti di limite e di continuità — delle quantità algebriche, in secondo luogo, come mediante un simile ampliamento si possano fare scomparire le differenze esistenti, dal punto di vista aritmetico, tra i numeri e le funzioni algebriche e i numeri ordinari.

Le teorie di Kronecker, diffuse non meno colle lezioni che cogli scritti, hanno trovato, specialmente in Germania, valorosi seguaci, che le svilupparono e le estesero considerevolmente. Fra essi merita di essere annoverato il König. Il presente volume, pubblicato prima in ungherese e poi dall'autore stesso tradotto in tedesco, consta, per una buona parte, di ricerche sue personali, le quali servono opportunamente a rendere più chiara e più intelligibile la teoria aritmetica delle quantità algebriche.

Il punto di partenza dell'esposizione di König è molto generale. Egli chiama *oloide* un campo di grandezze entro il quale si possono definire le operazioni di addizione e moltiplicazione, e che contiene tutti i numeri naturali escluso lo zero; dice poi *ortoide* un campo oloide, se, dati due elementi qualunque di esso, ne esiste sempre un terzo che moltiplicato per uno di quelli dà l'altro. Si comprende facilmente come da un campo oloide qualunque si possa passare ad un campo ortoide; basta aggiungere ad esso i rapporti dei suoi elementi a due a due considerati come nuove grandezze definite dalla relazione:

$$\frac{\alpha}{\beta}\,\beta = \alpha.$$

In un campo ortoide lo studio della divisibilità non presenta alcun interesse, giacchè evidentemente due elementi di esso sono sempre divisibili l'uno per l'altro. Invece pei campi *oloidi puri*, cioè non ortoidi, ossia, come diremo più semplicemente d'ora innanzi, pei campi oloidi, possono stabilirsi in modo affatto generale i concetti di divisibilità, di unità, di elementi equivalenti, appunto come si suol fare per i campi oloidi speciali più noti, come quello dei numeri naturali, quello dei numeri interi positivi e negativi, e quello dei numeri interi complessi. In questi ultimi campi, dati due elementi qualunque, esiste sempre il loro massimo comun divisore; i campi oloidi aventi questa proprietà si dicono *completi*, e in essi sussistono tutte le leggi

Digitized by Google

dell' aritmetica ordinaria. Ora il problema fondamentale dell' aritmetica generale può enunciarsi così: Dato un campo oloide non completo, assegnare un metodo per costruire un campo oloide completo che lo contenga.

Devono essere inoltre soddisfatte le seguenti condizioni:

a) Certi problemi insolubili nel campo primitivo devono cessare di esserlo in quello ampliato;

b) Le leggi formali delle operazioni devono continuare a sussistere.

Vediamo come tale problema possa risolversi.

Dato un campo oloide, prendiamo a considerare tutte le funzioni razionali intere *(forme)* di un numero qualunque di indeterminate aventi per coefficienti elementi del campo; tali forme costituiscono un campo oloide che contiene il primitivo e che è completo se lo è questo. Di qui viene un' importante conseguenza: poichè un campo ortoide può sempre considerarsi come completo, l' insieme delle forme aventi per coefficienti elementi d' un campo ortoide qualunque è pure completo.

Dopo ciò sia data una forma

$$F(z) = z^n + A_1 z^{n-1} + \cdots + A_{n-1} z + A_n,$$

i cui coefficienti appartengano ad un campo ortoide avente la proprietà seguente: che, data una forma qualunque i cui coefficienti sieno elementi di questo campo, possa trovarsi con un numero finito di operazioni un suo divisore primo. Supponiamo ancora che nel campo considerato non esista alcun elemento il quale, messo al posto di z, annulli $F(z)$. Chiamiamo *quantità complessa di rango n* un insieme di n elementi del campo $(C_0, C_1, \ldots, C_{n-1})$, e definiamo la addizione e la moltiplicazione di queste nuove quantità così:

$$\{C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}\} + \{C'_0, C'_1, \ldots, C'_{n-1}\} = \{C_0 + C'_0, C_1 + C'_1, \ldots, C_{n-1} + C'_{n-1}\},$$

$$\{C_0, C_1 \ldots, C_{n-1}\} \cdot \{C'_0, C'_1, \ldots, C'_{n-1}\} = \{D_0, D_1, \ldots, D_{n-1}\},$$

dove:

$$D_0 + D_1 z + \ldots + D_{n-1} z^{n-1}$$

è il resto della divisione di:

$$(C_0 + C_1 z + \cdots + C_{n-1} z^{n-1})(C'_0 + C'_1 z + \cdots + C'_{n-1} z^{n-1})$$

per $F(z)$. — Aggiungendo al campo dato tutte le quantità complesse di rango n formate coi suoi elementi, l' equazione $F(z) = 0$ (e con essa infinite altre) diviene risolubile, giacchè essa è soddisfatta da:

$$z = \{0, 1, 0, \ldots, 0\}.$$

Digitized by Google

Inoltre il campo così ampliato è il minimo campo ortoide in cui l'equazione $F(z) = 0$ sia risolubile.

Al problema ora accennato si riduce l' altro di ampliare un campo in modo che una data forma $F(z)$ risulti decomponibile in fattori lineari. Si può infatti costruire un' equazione $G(x) = 0$, coi coefficienti appartenenti al campo considerato (*risolvente di Galois*), tale che, ampliando il campo stesso nel modo poc' anzi accennato mediante l' aggiunzione di una radice di essa, il campo risultante soddisfaccia alle condizioni del problema.

Con questo risultato noi siamo giunti alla teoria di Galois, e quindi possiamo svolgere l'intera teoria delle equazioni algebriche in modo affatto indipendente dal concetto di irrazionale, mentre d' altra parte siamo in grado di dimostrare, per forme $F(z)$ a coefficienti appartenenti ad un campo ortoide qualunque, un' identità stabilita da Gauss (*Demonstratio nova altera* etc., Werke III), e di cui egli si servì come base per dimostrare il teorema fondamentale dell' algebra.

Denotiamo con T il campo ottenuto ampliando un dato campo oloide C mediante l' aggiunzione d' una radice d' un' equazione algebrica. Ogni elemento di T soddisfa ad infinite equazioni algebriche a coefficienti appartenenti a C; se una di tali equazioni ha per coefficiente della potenza di massimo esponente dell' incognita l' unità, l'elemento corrispondente dicesi *intero*. Gli elementi interi di T formano un campo oloide che indichiamo con $[T]$. In generale, anche se C è completo, non lo è $[T]$; ma si può dedurre da $[T]$ un campo oloide completo ampliandolo mediante l' aggiunzione di dati quozienti di forme a coefficienti appartenenti a $[T]$.

Così tutti gli scopi voluti sono raggiunti.

Ed ora non ci resta che da rivolgere una parola di lode all' autore per aver avuto il coraggio di farsi — come egli dice — popolarizzatore delle difficili teorie di Kronecker e per essere riuscito ad adempiere così felicemente il compito impostosi.

G. Vivanti.

I. Tropfke. — *Geschichte der Elementar-Mathematik, in systematischer Darstellung.* Leipzig, Veit und Co. 8.° I Bd. 1902, p. VIII + 332 — II Bd. 1903, p. VIII + 496 [Prezzo Mk. 8 + 12].

Il voto fatto nell'Aprile 1903 dal Congresso delle Scienze storiche, concernente l' introduzione dell' elemento storico nell' insegnamento secondario delle scienze (*Bollettiao* T. VI, 1903, p. 93) e di recente confermato dai Congressi di Heidelberg (v. *Bollettiuo*, T. VIII, 1904, p. 126) e Ginevra (id. p. 128), anche ottenendo l' approvazione del potere esecutivo, avrebbe rischiato di non dare alcun risultato note-

Digitized by Google

vole per la mancanza di un' opera fededegna che servisse agli insegnanti come guida sicura e di agevole uso. Ora l' opera del Tropfke, che oggi segnaliamo ai nostri lettori, colma nel modo più felice la lacuna che in conseguenza esisteva nella letteratura matematica; piuttosto che una « storia delle matematiche », come il titolo farebbe credere, essa è una collezione di monografie storiche sopra le varie teorie matematiche costituenti il programma dell' insegnamento secondario; essa infatti comprende *quattordici sezioni* di differente ampiezza, con i temi seguenti:

I. Calcolo aritmetico. II. Algebra. III. Geometria piana. IV. Logaritmi. V. Trigonometria rettilinea. VI. Geometria e trigonometria sferiche. VII. Serie. VIII. Calcolo d' interesse. IX. Analisi combinatoria e Calcolo delle probabilità. X. Funzioni continue. XI. Geometria solida. XII. Geometria analitica. XIII. Le coniche. XIV. Massimi e minimi.

A comporre la sua opera l'A. si è preparato seriamente con studi vasti e profondi, non solo sopra le più reputate opere stòriche, ma anche con uno studio diretto delle fonti; le note a piè di pagina, in numero di circa 3000, lo provano ad evidenza! Per conseguenza le notizie da lui date si possono generalmente accettare come corrispondenti a quanto oggi sappiamo intorno alla storia delle scienze esatte (1).

Interessandosi più alle cose che alle persone, l'A. si è limitato a indicare per ogni matematico gli anni estremi dell' esistenza ed i luoghi in cui visse; considerando l' estensione raggiunta dal suo scritto, nessuno vorrà fargli una colpa di siffatto laconismo. Meno lodevole sembra il sistema da lui adottato di porre tali dati in parentesi e ripeterli ogni

(1) G. Eneströn, con l' accuratezza e la competenza che tutti gli riconoscono, ha segnalato (*Bibl. math.* 3.ª Ser , T. IV, p. 213 e 404) alcune inesattezze in cui incorre l'A. Ci sia lecito aggiungere per conto nostro le osservazioni seguenti:

T. I, p. 457. Desargues nacque a Lione, non a Parigi.

P. 174-175. Nella storia dei numeri complessi e della loro rappresentazione geometrica, vanno ricordati Bellavitis e la sua teoria delle equipollenze.

P. 292. Il primo tentativo per dimostrare l' irresolubilità algebrica delle equazioni di 5.° grado, appartiene a Ruffini.

T. II, p. 19. L' opera di Schotten è in due volumi, pubblicati negli anni 1890 e 1893.

P. 21. R. Baltzer fu professore a Giessen, non a Konigsberg.

P. 79. Le notizie storiche sulla teoria dell' equivalenza non sono complete.

P. 225. Il costume di indicare nelle formole trigonometriche il raggio del circolo fondamentale, non scompare con Eulero; il trattato del Lacroix (1789) sta a provarlo.

P. 287. Dopo A. Burg, invece di (?) va posto (1797-1882: Wien).

P. 318. lin. 14. L' espressione data per s_n è errata e va surrogata con la seguente: $\frac{n+1}{3}(1+2+\ldots+n)+n$

P. 354, lin. 8. Invece di $P_n = (n-1)\,P_{n-1}$ si legga $P_n = n\,P_{n-1}$.

Digitized by Google

qualvolta si offriva l'occasione di citare le persone a cui essi si riferiscono; egli, che saviamente chiuse il suo I volume con un interessante elenco cronologico dei più importanti simboli algebrici e con una eccellente crestomazia matematica, poteva ben aggiungere anche una tavola alfabetica riassumente le biografie degli scienziati da lui citati, modellata sulle *Zeittafeln zur Geschichte der Mathematik* di F. Müller. Tale piccola imperfezione di forma speriamo scomparirà in una ventura edizione, che non mancherà all'opera del Tropfke se il pubblico matematico saprà valutare esattamente il pregio di essa e l'utilità che può recare a maestri e discepoli.

G. L.

Il Codice Atlantico di Leonardo da Vinci *nella Biblioteca Ambrosiana di Milano. Riprodotto e pubblicato dalla Regia Accademia dei Lincei sotto gli auspici e col sussidio del Re e del Governo.* Milano, U. Hoepli, 1894-1904.

Leonardo da Vinci, con testamento steso ad Amboise il 23 Aprile 1518, lasciava al suo allievo prediletto, Francesco Melzi, tutti i manoscritti, strumenti e dipinti che egli aveva recato in Francia. Avvenuta la morte del sommo pittore (2 Maggio 1519) il Melzi riportava in Italia la preziosa eredità fatta, allogandola nella sua villa di Vaprio, ove essa venne con religiosa cura custodita sino al 1570, epoca della morte del possessore. Ma, spento il Melzi i di lui eredi, incapaci di apprezzare il valore di quei cimeli; permisero che certo Lelio Gavardi li portasse a Firenze con la speranza di cederli a caro prezzo al Granduca di Toscana. Ma il contratto non potè aver luogo per la sopravvenuta morte del presunto acquirente; ed allora il Gavardi trasferì il suo tesoro a Pisa, sperando venderlo ad Aldo Manuzio il Giovane; ma a Pisa egli invece s'imbattè nel milanese G. A. Mazzenta, il quale sollevò gli scrupoli del Gavardi sulla legittimità del suo possesso e s'incaricò di fare la restituzione ad Orazio Melzi dei tredici volumi asportati dalla sua casa. Ma questi, stupito per quell'inattesa e non desiderata restituzione, non solo regalò quei volumi al Mazzenta, ma mise a sua disposizione il resto delle memorie vinciane da lui possedute. Diffusasi rapidamente la notizia di tale dono, molti si rivolsero al Melzi per ottenerne i favori e così ebbe origine la deplorabile dispersione di quella preziosa collezione. Fra i più ardenti raccoglitori dei disegni di Leonardo si distinse Pompeo Leoni, il quale indusse il Melzi a reclamare dal Mazzenta la restituzione dei volumi da lui avuti ed infatti egli ne ottenne sette, che cedè al Leoni; tre degli altri sei, già passati in proprietà dei fratelli Mazzenta, il Leoni potè pure ricuperare; in tal modo egli venne in possesso di circa 1700 disegni del

Digitized by Google

sommo pittore, che egli ordinò in modo, secondo lui, migliore, per formare quello che era destinato a passare alla storia col nome di *Codice Atlantico*. Questo, alla morte del Leoni, venne, per eredità, a Cleodoro Calchi, che lo cedette per 300 Scudi al Conte Galeazzo Arconati, il quale (probabilmente per intromissione del Cardinale Borromeo) lo lasciò alla Biblioteca Ambrosiana, che tuttora lo conserva, dopo esserne stato solo privata durante il soggiorno di 19 anni che esso fece a Parigi durante l'epoca napoleonica.

La pubblicazione del *Codice Atlantico*, chiesta dagli artisti adunati a Parma nel Settembre 1870 e approvata da Cesare Correnti, nel 1872 Ministro della P. I., veniva nel 1885 dal di lui successore Michele Coppino affidata alla R. Accademia de' Lincei. E questa, accettando tale incarico, si affrettava ad eseguirlo, tanto che fin dal 1894 era in grado di pubblicare il I fascicolo dell'opera desiderata, contenente in 40 pagine la riproduzione in oliotipie di 13 fogli del codice vinciano, accompagnati da una duplice trascrizione del testo. Ora tale opera è compiuta e l'esecuzione di essa è ben degna dell'artista illustre che ne è il protagonista e del consesso che vi ha presieduto. Quantunque l'esiguo numero (280) di copie che ne venne fatta e il suo prezzo elevato (circa 1600) rende un privilegio di pochissimi il possederla, pure non dubitiamo che sarà stimolo efficace e possente a nuovi studi intorno ad uno dei pensatori più fecondi che abbia prodotto la patria nostra.

G. L.

G. Castelnuovo. — *Lezioni di Geometria analitica e proiettiva.* Volume I (Forme di prima specie — Geometria analitica del piano — Curve di secondo ordine). Roma-Milano, Società ed. Dante Alighieri, 1904, gr. 8; p. VII + 507. [Prezzo L. 12].

Queste « *Lezioni di Geometria* » che già sotto la prima loro veste transitoria di appunti litografici erano state largamente ricercate e consultate, ottennero oramai, da che furono pubblicate sotto forma definitiva, un successo così diffuso e indiscusso, che a me non rimarrebbe se non di prenderne atto col più sincero consenso. Ma il posto saliente che queste *Lezioni* sono venute ad occupare nella letteratura scolastica, non soltanto italiana, e gli ottimi risultati dell'esperimento, che io feci di codesto trattato nella scuola, mi inducono a intrattenere su di esso, sia pur brevemente, i lettori del *Bollettino*.

Carattere veramente singolare e precipuo di queste Lezioni è l'equilibrio mirabile, che vi è costantemente conservato fra l'elevata concezione del diseguo e degli scopi, e la sapiente sobrietà del dettaglio. Dalla libertà di metodo e dalla conseguente varietà di mezzi

Digitized by Google

di ricerca, di cui l'A. sin dapprincipio dispone, egli non ha voluto trarre argomento per dare alle sue lezioni uno sviluppo più ampio di quanto comunemente si suole nei nostri corsi di primo anno; ma ne ha invece approfittato per seguire le diverse teorie nel loro graduale svolgimento storico, giungendo così, senza sforzo e coi mezzi più semplici, a porre nella luce migliore, sotto i vari loro aspetti, quei concetti generali, che permettono di raccogliere in una veduta sintetica questo primo campo di ricerche geometriche. Intorno a codesti punti salienti si raggruppano e si svolgono le varie teorie, secondo un disegno semplice ed armonico, che mette in evidenza, a seconda della varia loro importanza, le relazioni da concetto a concetto; ed anche fra la moltiplicità inevitabile delle applicazioni particolari, delle osservazioni minute e delle digressioni, conserva inalterata la nitidezza del suo profilo.

La scelta dell' uno o dell' altro metodo è naturalmente suggerita dall' indole delle singole questioni; ma, dato l' ordine rigoroso secondo cui queste, in base alla loro natura, si raggruppano intorno ai concetti fondamentali, non ne deriva un alternarsi saltuario e confuso dei due metodi, ma l' uno o l' altro di questi si presenta a volta a volta in tutto un ordine di problemi, in guisa che risultano chiaramente lumeggiati i caratteri e la portata di ciascuno di essi; e la gara, in cui, per così dire, il ragionamento sintetico e il procedimento analitico vengono in tal modo presentati ai giovani, è singolarmente atta a educare in loro quella varietà di iniziative e quella ingegnosità di espedienti, che sono fuor di dubbio fra gli scopi principali cui debbono mirare questi primi insegnamenti matematici.

A codesti medesimi scopi si ispirano i criteri, che hanno presieduto alla scelta e all' ordinamento dei numerosissimi esercizi che corredano queste *Lezioni* e che (io non credo con questo apprezzamento di abbassare il punto di vista da cui va giudicata l'opera del CASTELNUOVO) ne costituiscono una delle parti più sostanziali e più degne di considerazione. Il testo, come è naturale, ne è del tutto indipendente; ma non può da essi prescindere chi voglia rendersi conto della efficace ed elevata azione didattica, che quest' opera è destinata ad esercitare. Gli esercizi non vengono sistematicamente relegati, come aggiunte accessorie, alla fine dei capitoli; ma si intercalano a gruppi nel testo, riattaccandosi immediatamente ad esso, dappertutto ove siavi luogo a completare, con nuove verità più riposte, ordini di idee già acquisiti, o dove sia aperta la strada a generalizzazioni feconde, o quando sia possibile dai punti di vista di recente raggiunti vedere sotto nuovi aspetti risultati già prima ottenuti. Non mancano gli esercizi puramente scolastici, destinati ad una diretta applicazione delle teorie del testo; ma da essi, con una gradazione sempre accuratamente studiata, si passa a

Digitized by Google

serie di teoremi e di problemi, che, nella loro ordinata successione, costituiscono, in gran parte, veri e propri schemi di teorie organiche (cito, a caso e a puro titolo di esempio, la teoria delle reti di cerchi, la inversione, la polarità circolare, le affinità circolari di Möbius, la teoria delle coniche come figure omologiche del cerchio, le teorie dei cerchi focali di Bobillier e Steiner, delle coniche confocali, ecc. ecc.) le quali, fondendosi armonicamente col disegno generale dell'opera, ne aumentano in modo singolare il valore didattico e l'interesse. Giacchè l'A., escludendo costantemente ogni questione o futile o artificiosa, ha desunto in massima parte il materiale degli esercizi dai precursori e dai creatori della moderna Geometria: ed anzi, con note storiche con richiami e con raffronti, ha cercato di suscitare nei giovani il desiderio di ricorrere alle opere originali dei sommi, alle quali, secondo il detto di Abel, deve direttamente attingere chi in Matematica vuol fare cammino. Così, se alla trama semplice della esposizione sistematica di queste *Lezioni*, la quale, di per sè, comprende quanto di cognizioni geometriche è strettamente necessario al futuro ingegnere, immaginiamo sovrapposti i complementi di teoria, di metodi e di vedute, che sono materia degli esercizi, noi ritroveremo in questo libro la guida scientificamente e didatticamente più opportuna per quei giovani, che, alla soglia degli studi matematici, non solo intendono di stabilire su solide basi la propria coltura, ma mirano altresì ad addestrare l'ingegno e ad educare, raffinandolo, il proprio gusto geometrico.

Questo primo volume (cui seguirà un secondo sulla Geometria dello spazio e la teoria delle quadriche) comprende un'*Introduzione*, tre Parti, rispettivamente dedicate alle *Forme di prima specie*, alla *Geometria del piano*, *alle Curve del second'ordine* e un'Appendice.

Nella INTRODUZIONE, classificate le forme geometriche, e introdotti gli elementi impropri, vengono enunciate le proposizioni fondamentali dell'appartenenza, in modo da stabilire direttamente la legge di dualità nello spazio, e, dopo chiarita accuratamente la distinzione delle proprietà grafiche dalle metriche, vien dimostrato il teorema dei triangoli omologici, del quale è fatta applicazione ad alcune costruzioni lineari fondamentali. Quanto alla legge di dualità per le forme di seconda specie, l'A. qui si limita ad accennarvi, rimandandone la dimostrazione alla Geometria analitica del piano. Ora io confesso che, pure riconoscendo i vantaggi che così si conseguono, sopratutto in riguardo alla brevità, avrei preferito che la legge di dualità fosse qui subito stabilita direttamente in tutta la sua estensione. Giacchè io credo che codesta legge, così spezzata, per ragioni che ai giovani resteranno del tutto ignote, in due parti, non solo distanziate da una sì lunga serie

Digitized by Google

di teorie, ma dimostrate altresì con metodi completamente diversi, perda gran parte di quell' interesse altamente suggestivo, per cui essa mi sembra qui dapprincipio singolarmente atta ad orientare in qualche modo verso i nuovi metodi e le più elevate concezioni della Geometria proiettiva chi esce pur allora dal campo limitato della Geometria elementare.

Il Cap. I della PARTE PRIMA studia *i sistemi di coordinate sulle forme di prima specie*. Stabilita rigorosamente la corrispondenza biunivoca fra gli elementi di una forma siffatta e i numeri reali, si passa dalla considerazione delle coordinate *ascisse* a quella del *rapporto semplice* di tre elementi e, quindi, del *birapporto* di quattro; e lo studio del comportamento del rapporto semplice rispetto alle proiezioni e sezioni, mette in luce il carattere proiettivo del birapporto e del sistema di coordinate cui esso dà luogo. Dopo ciò, il gruppo armonico di quattro elementi vien definito come quello il cui birapporto vale — 1; ma subito dopo, in base alle sostituzioni sui quattro elementi che lasciano inalterato codesto valore del birapporto e tenuto conto della unicità, analiticamente provata, dal quarto armonico, viene stabilita la costruibilità dei gruppi armonici di punti e di rette per mezzo dei quadrangoli e dei quadrilateri completi. La risoluzione grafica del problema delle coppie che divide armonicamente due coppie assegnate è dedotta dalla discussione dell' equazione del problema. — Il Cap. II è dedicato alla *proiettività tra forme di prima specie*, la quale è definita come corrispondenza biunivoca che conserva il valore del birapporto di ogni quaterna di elementi. Notata la sovrabbondanza di siffatta condizione, si dimostra, per via analitica, che basta richiedere che siano conservati i valori dei birapporti di tutte le quaterne aventi comune una terna fissa, oppure che (teorema di Staudt) siano conservati i gruppi armonici. Dalla prima di codeste osservazioni seguono il teorema fondamentale (unicità della proiettività che fa corrispondere due terne arbitrarie di elementi) e la forma dell' equazione delle proiettività, della quale vengono dedotte le proprietà metriche e i casi particolari di quella. D' altra parte il carattere proiettivo del birapporto conduce a stabilire la decomponibilità di ogni proiettività in un prodotto di proiezioni e sezioni: onde risultano le costruzioni grafiche effettive. Da ultimo il problema della determinazione dei punti uniti di una proiettività tra forme di prima specie sovrapposte vien risoluto sia analiticamente, sia colla costruzione di Steiner, dopo che la definizione di proiettività è estesa al caso, in cui una o entrambe le forme di prima specie siano punteggiate sostenute da una circonferenza (teorema di Pascal per il cerchio). — Il Cap. III tratta della *involuzione* e si chiude con un cenno sulla rappresentazione geometrica secondo Staudt degli elementi immaginari sopra una forma di prima specie,

Digitized by Google

e sulla applicazione di codesto metodo alla risoluzione dei problemi di secondo grado a soluzioni immaginarie.

Nella PARTE SECONDA i primi tre Capitoli (*Relazioni di posizione fra punti e rette — Distanze, angoli, aree — Trasformazione delle coordinate — Coordinate omogenee di punti e rette — Coordinate proiettive*) stabiliscono i fondamenti della Geometria analitica del piano, e in essi l'A., in base ad un criterio didattico assai opportuno, fa uso larghissimo delle coordinate cartesiane, limitandosi, quanto alle proiettive, a chiarirne efficacemente il concetto in alcuni paragrafi, che non sono assolutamente necessari alla comprensione del seguito e che perciò sono contrassegnati da un asterisco. — Nel Cap. IV è studiata la *rappresentabilità analitica delle curve piane e degli inviluppi di rette*, sia per mezzo di un' unica equazione, sia mediante equazioni parametriche; e quest' ultimo metodo, e il concetto di coordinate curvilinee del piano sono applicati a dimostrare la parte diretta del teorema di Steiner sulla generazione, mediante fasci proiettivi, delle curve del secondo ordine. Le applicazioni dei metodi precedenti continuano nel Cap. V, dove è svolta la teoria del cerchio e dei fasci di cerchi, è studiata, in base alle equazioni armoniche, la forma delle curve del secondo ordine e infine è dato un cenno di altre curve piane speciali, algebriche e trascendenti (Cissoide, Concoide, Curve del Cassini; Sinusoide, Cicloide, Quadratrice di Dinostrato). — Il Cap. VI tratta della *proiettività tra forme di seconda specie*, la quale è definita come corrispondenza biunivoca, che trasforma gli elementi di una forma di prima specie negli elementi di una forma di prima specie: onde risulta subito il *teorema fondamentale* (forme di prima specie omologhe sono proiettive) e quindi la determinazione di una proiettività piana mediante due quaterne generiche di elementi. Qui simmetricamente a quanto è stato fatto per le forme di prima specie, l'A. determina, ricorrendo alle coordinate proiettive, la forma delle equazioni della proiettività: ma poi, per non rendere necessario l' uso di codeste coordinate, dimostra direttamente che una sostituzione lineare omogenea sulle coordinate cartesiane omogenee definisce una proiettività; e dal computo delle costanti conclude che ogni proiettività è rappresentabile in tal modo. Tratta quindi dei casi particolari metrici della collineazione, studia diffusamente l' omologia, e, dopo avere discusso analiticamente il problema della determinazione degli elementi uniti di una collineazione fra piani sovrapposti, considera le correlazioni e in particolare la correlazione polare, mettendo in evidenza come il luogo dei punti autoconiugati sia sempre una curva del second' ordine, a punti reali o immaginarii.

Si giunge così alla PARTE TERZA, dedicata alle *curve del second'ordine*. Stabilita analiticamente l' unicità della conica per cinque punti

Digitized by Google

generici e classificate le curve del second' ordine nelle tre specie, è dimostrato nel Cap. I che una conica definisce una ben determinata polarità, di cui essa è curva fondamentale; dopo di che vengono assegnate le costruzioni grafiche di poli e polari, e, in un paragrafo accessorio è dimostrato sinteticamente, in base al teorema di Staudt sui triangoli iscritti in una conica, la seconda parte del teorema di Steiner sulla generazione delle coniche mediante fasci proiettivi. Una diversa dimostrazione di codesta seconda parte del teorema di Steiner è data nel Cap. II, in base alla prima parte di esso (stabilita come dicemmo nel Cap. III della Parte II) e alla unicità della conica per cinque punti. Dopo di che, dal teorema di Steiner vengono dedotti i teoremi di Pascal, di Brianchon e di Desargues, che sono applicati alle costruzioni lineari fondamentali, relative alle coniche; e al teorema di Desargues si riattacca lo studio analitico della intersezione di due coniche e dei fasci e delle schiere di coniche. Seguono tre capitoli sulle *proprietà diametrali*, sulle *equazioni ridotte delle coniche*, sulle *proprietà focali;* e l' ultimo capitolo studia la trasformazione di una conica mediante una collineazione (coniche collineari, omologiche, affini, simili, omotetiche).

Nell'APPENDICE, infine, accanto ad un formulario di Geometria analitica del piano, l'A., a completare le considerazioni già enunciate nel testo sui problemi di primo e secondo grado e sulla loro risolubilità colla riga e col compasso, inserisce un bellissimo articolo « *Sui problemi geometrici* ». Viene in esso ripreso l' ordine di idee, che l'A. aveva già svolto in un suo lavoro precedente, oramai ben noto (1). Ma qui egli, potendo presupporre la conoscenza precisa delle teorie proiettive e dei metodi analitici quali son presentati nel testo, dà alla sua trattazione una forma più sintetica e una maggiore profondità, mentre d' altro canto nella gran copia di problemi già prima risoluti o proposti egli può trascegliere gli esempi più opportuni ed efficaci ad illuminare da ogni lato le sue conclusioni. UGO AMALDI.

V. BJERKNES. — *Carl Anton Bjerknes. Gedächtnisrede gehalten vor der Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania am 17 April 1903.* Mit einem Bildnis. Leipzig. A. Barth. 1904, 8.°, p. 31 (Prezzo M. 1,20).

Carlo Antonio Bjerknes nacque a Christiania il 24 Ottobre 1825. Dopo di avere subito nel 1814 l' *Examen artium* e nel 1845 l' *Examen philosophicum* si inscrisse nel patrio Ateneo nell' intento di de-

(1) *Sulla risolubilità dei problemi geometrici cogli istrumenti elementari: contributo della Geometria analitica.* Nei Collectànea di F. Enriques « *Questioni riguardanti la Geometria elementare* » (Bologna, Zanichelli, 1900).

Digitized by Google

dicarsi alla mineralogia. Tre anni dopo subì felicemente l'esame di stato, onde, nel 1845, ottenne il posto di sopraintendente nella miniera argentifera di Kongsberg. Nelle ore d'ozio egli studiò le matematiche con tale profitto da ottenere nel 1852 la medaglia d'oro per la risoluzione di un problema di matematica posto a concorso dal governo; questo successo attrasse su di lui l'attenzione dell'autorità universitaria, onde tosto divenne insegnante nella scuola media di Kongsberg, e nel 1854 ottenne uno stipendio dall'Università. A spese della quale intraprese nel seguente anno un viaggio di studi all'estero; così ascoltò a Parigi le lezioni di Cauchy e Lamé, e a Gottinga quelle di Lejeune-Dirichlet: furono queste specialmente che esercitarono su di lui influenza perenne: chè, avendo ivi apprese dalla bocca stessa del celebre successore di Gauss, i risultati delle sue celebri ricerche idrodinamiche, fu indotto a riprendere il corso di alcune antiche idee ed a porre i fondamenti di investigazioni che egli non doveva più abbandonare e che gli assicurarono la fama. Ritornato a Christiania fu costretto ad occuparsi nuovamente di mineralogia; ma nel 1859 succesce al Broch nella cattedra di matematica e meccanica nella scuola militare, due anni dopo sostituì provvisoriamente Hansteen all'Università e finalmente (1863) ne prese stabilmente il posto. Delle sue ricerche idrodinamiche cominciò a dare pubblica notizia nel 1868 e poi qualche framento ne pubblicò di quando in quando; ma l'opera intera (che riempie circa 48 mila fogli in 4.° manoscritto) non fu mai pubblicata. Il figlio Wilhelm (autore dell'elogio cui attingiamo) ne ha estratto una poderosa opera in due volumi (1), di cui è a desiderare che qualche persona competente renda conto in queste colonne; l'anologia ivi stabilita tra i fenomeni idrodinamici e quelli elettrici e magnetici è così nuova ed importante da assicurare a C. A. Bjerknes un posto notabile nella storia della fisica-matematica, mentre le sue note ricerche biografiche sopra Abel riscossero già un meritato plauso da tutti gli ammiratori del celebre norvegese. Un colpo apoplettico spense il Bjerknes addì 20 Marzo 1903, nel mentre con alcuni colleghi ritornava dalla sua lezione universitaria; con lui scomparve la figura caratteristica di un eminente pensatore solitario. G. L.

H. Bruns. — *Grundlinien des wissenschaftlichen Rechnens.* Leipzig, Teubner, 1903. VII-159 p., 8.° (Prezzo M. 3,40).

L'Autore distingue tre gradi nell'arte di calcolare. Il primo è quello che fa parte della coltura generale, e che anzi appartiene anche alle

(1) *Vorlesungen über hydrodynamische Fernkräfte nach C. A. Bjerknes' Theorie* — 2 vol. Leipzig, Barth, 1900 e 1902.

Digitized by Google

persone meno istruite. Il secondo giunge sino alla risoluzione delle equazioni numeriche ed all'uso delle tavole di logaritmi, e ad esso si riferiscono le *Vorlesungen über numerisches Rechnen* di Lüroth, di cui abbiamo fatto cenno nel *Bollettino* (1901, p. 82). Il terzo, quello che l'autore chiama *calcolo scientifico*, comprende i metodi più elevati di calcolo: interpolazione, derivazione e integrazione numerica, metodo dei minimi quadrati, ecc. Appunto al calcolo scientifico è dedicato il presente volumetto, il quale, pur presentando alcuni punti di vista d'interesse generale, costituisce un aiuto particolarmente prezioso per coloro che si occupano di scienze d'osservazione, e specialmente d'astronomia.

G. VIVANTI.

N. NIELSEN. — *Handbuch der Theorie der Cylinderfunktionen*. Leipzig, Teubner, 1904, XII-408 p., 8.° (Prezzo M. 14).

Il materiale di questo trattato è in gran parte opera personale dell'autore, il quale da parecchi anni va pubblicando importanti memorie sulle funzioni cilindriche.

L'Autore definisce le funzioni cilindriche $C^\nu(x)$ come la soluzione più generale del sistema di equazioni funzionali:

$$C^{\nu-1}(x) - C^{\nu+1}(x) = 2D_x\, C^{\nu}(x),$$

$$C^{\nu-1}(x) + C^{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}\, C^{\nu}(x);$$

studia dapprima quattro soluzioni speciali di questo sistema, che egli chiama *funzione di Bessel* $J^\nu(x)$, *funzione di Neumann* $Y^\nu(x)$ e *funzioni di Hankel* $H_1^\nu(x)$, $H_2^\nu(x)$, indi passa alla considerazione delle funzioni cilindriche più generali, la cui espressione è:

$$C^\nu(x) = a(\nu)\, J^\nu(x) + b(\nu)\, Y^\nu(x),$$

$a(\nu)$, $b(\nu)$ denotando due funzioni periodiche di ν col periodo 1.

È impossibile riassumere in breve il ricco contenuto del presente volume; e noi ci limitiamo ad accennare che esso è diviso in tre parti, di cui la prima tratta delle proprietà fondamentali delle funzioni cilindriche, la seconda degli integrali definiti contenenti funzioni di questa natura, la terza dello sviluppo delle funzioni analitiche secondo funzioni cilindriche. Non deve però passarsi sotto silenzio la lista bibliografica che chiude il volume, la quale contiene più di 300 titoli di opere o memorie.

G. VIVANTI.

Digitized by Google

Analytische Geometrie der Kegelschnitte, mit besonderer Berücksichtigung der neueren Methoden. Nach G. SALMON *frei bearbeitet von* W. FIEDLER. VI. *Auflage.* Leipzig, Teubner, 8.°, *Erster Teil*, 1898, p. XXV+441. *Zweiter Teil*, 1903, p. XXIV+414. (Prezzo dei due volumi legati Mk. 18).

La V ed. (1887) di quest' opera insigne differisce sostanzialmente dalla precedente per la considerazione metodica degli elementi immaginari, che Guglielmo Fiedler introdusse coll' aiuto del figlio Ernesto. Nell' attuale invece non vennero operate innovazioni radicali, essendosi l' egregio traduttore limitato a fare qualche ritocco nei particolari, ad aggiungere qualche esempio ed a rendere ancora più complete le notizie bibliografiche. Il magistrale trattato di Salmon-Fiedler rimane così, quello che è da circa un mezzo secolo, cioè la miglior guida allo studio della geometria moderna; dico *geometria* e non *geometria analitica* perchè (contrariamente a quanto sembrerebbe indicare il titolo) sono ivi insegnati ed applicati *tutti* i principali metodi che la scienza odierna mette a disposizione di chi voglia investigare le proprietà delle figure geometriche piane di primo e secondo ordine.

G. L.

F. SCHUR. — *Lehrbuch der analytischen Geometrie.* Mit zahlreichen Figuren im Text. Leipzig, Veit und C., 1898, p. X+216, 8.° (Prezzo Mk. 6).

Questo eccellente trattato, benchè uscito dalla penna di un geometra ben noto fra noi, è rimasto pressochè sconosciuto in Italia. Se ci decidiamo a farne ora questo cenno tardivo gli è che, essendo esso destinato di preferenza a coloro che volgonsi verso gli studi applicati e le scienze naturali, ci sembra possa interessare chi si propone di esporre in breve, senza grande apparato di calcolo, i fondamenti della geometria analitica e le sue applicazioni allo studio delle coniche e delle quadriche. Non è il caso di addentrarci in un esame del volume in questione; notiamo soltanto che in esso di determinanti non è fatto uso alcuno.

G. L.

J. H. GRACE and A. YOUNG. — *The algebra of invariants.* Cambridge, University Press, 1903, p. VII+384, 8.° (Prezzo del volume leg. 10 Sh.).

La teoria delle funzioni godenti di proprietà invariantive di fronte a sostituzioni lineari venne fondato in Inghilterra per opera del Boole,

Digitized by Google

del Sylvester e del Cayley. Hermite in Francia e Brioschi in Italia per primi accolsero e svolsero tale nuova importante disciplina. La quale era destinata a subire per opera dell'Aronhold, del Clebsch e del Gordan una trasformazione radicale ed oltremodo benefica; l'antica simbolica inglese, che il Salmon diffuse in tutto il mondo grazie ad un suo notissimo trattato, fu così surrogata da altra più semplice e più malleabile. Malgrado queste doti, da tutti riconosciute ed ammirate, gli antichi simboli inglesi avevano sempre *corso legale* al di là della Manica, probabilmente perchè nessuno aveva pensato ad esporre metodicamente i nuovi. Or è questo appunto che si proposero e fecero i Prof. Grace e Young nel volume oggetto del presente cenno. Sono in esso metodicamente esposte tutte le proposizioni essenziali della teoria delle forme (binarie, ternarie, ecc.) e fatto cenno delle principali applicazioni che essa ricevette nella geometria: dall' indice seguente emerge quale siano l'ordine ed i limiti della materia trattati:

I. Introduzione. - II. Teoremi fondamentali. - III, IV. Transvettanti. - Sistemi completi. - VI. Teorema di Gordan. - VII. La forma binaria di 5.° ordine. - VIII. Sistemi simultanei. - IX. Teorema di Hilbert. - X. Applicazioni geometriche. - XI. Apolarità e curve razionali. - XII, XIII. Forme ternarie. - XIV. Apolarità. - XV. Tipi di covarianti. - XVI. Teoremi generali sulle forme.

Appendice. — I. La notazione simbolica - II. Teorema di Wronski. - III. Lemma di Jordan. - IV. Tipi di covarianti.

Grazie alla sostanza ed alla forma, quest' opera sembra destinata ad esercitare la più sana influenza ed a godere del migliore successo in ogni parte del mondo in cui la matematica sia coltivata e la lingua di Shakspeare sia intesa.

G. L.

C. C. Dassen. — *Étude sur les quantités mathématiques. Grandeurs dirigées. Quarternions.* Paris, Hermann, 1903, 8.° gr., p. VI+135. (Prezzo 5 Fr.).

Quest' operetta, lavoro di un professore dell' Università di Buenos-Ayres, ha lo scopo di diffondere la conoscenza delle generalizzazioni successive che ricevette le nozioni di quantità, quando si abbandona il campo reale. Esso consta di un' *Introduzione*, di una *I. Parte*, relativa al concetto di quantità e di una *II. Parte*, dedicata alle « *quantitées dirigées* » sulla retta, nel primo e nello spazio; si chiude con tre Note consacrate risp. alla costruibilità dell'analisi sul solo concetto di numero intero, agli angoli immaginari ed allo spazio di quattro dimensioni.

G. L.

Digitized by Google

F. Gomes Teixeira. — *Obras sobre Mathematica. Publicadas por ordem do Governo Portuguès.* Vol. I. Coimbra, Imprensa da Universidade, 1904, p. I-VIII, 402.

Il Governo Portoghese ha iniziato, la pubblicazione di tutte le memorie scientifiche dell'illustre Prof. F. G. Teixeira, ed ha reso un omaggio, ben meritato, ad uno dei più chiari figli della colta nazione sorella, un vero servizio agli studiosi, mostrando in pari tempo in quanto onore siano tenuti colà gli studi matematici, dei quali il Teixeira è così benemerito (1).

Nel riunire in un sol corpo i numerosi lavori della sua trentenne, laboriosa carriera scientifica, il Teixeira ha voluto sottoporre a una minuta revisione tutta l'opera sua; perciò e per non frapporre un un lungo indugio al desiderio del Governo, il Teixeira non seguirà, nella ristampa, l'ordine cronologico; e nè, pare, debba essere seguita una divisione per materia.

Tuttavia questo primo volume, eccezione fatta di due brevi memorie sulle equazioni a derivate parziali del secondo ordine, e sulle derivate di ordine qualunque, può riguardarsi costituito di due parti ben distinte e rispondenti a due soggetti che, a varie riprese, hanno formato materia di studio del dotto professore. La prima parte contiene infatti gli studi notevolissimi sugli sviluppi delle funzioni in serie e che, dalla interessante monografia premiata dall'Accademia Reale di Madrid nel 1897, dagli sviluppi delle funzioni implicate, condotti coi metodi rigorosi dell'analisi moderna (J. de Liouville. 1881, 1889), terminano coi lavori originali sullo sviluppo di una funzione in serie ordinata secondo le potenze del seno e coseno della variabile (Crelle J. 1896) o secondo le potenze di una data funzione (ibidem. 1900) e sullo sviluppo delle funzioni doppiamente periodiche di seconda specie (ibidem 1903). A questo periodo degli studi dell'A. appartengono le ricerche sulla convergenza delle formule di interpolazioue di Lagrange, Gauss, ecc. (Crelle J. 1903) ed alcuni articoli brevi ma interessanti su varie questioni di analisi.

La seconda parte contiene diversi articoli di geometria analitica

(1) Francesco Gomes Teixeira (n. 1851) ha fatto i suoi studi all'Università di Coimbra, dove divenne professore nel 1877. Nel 1881 fu nominato professore all'*Academia Polytechnica di Porto*, di cui presentemente è anche direttore. Pubblica, dal 1881, il *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas*, ben noto a tutti gli studiosi.

Il Prof. Teixeira è autore d'un notevole e modernissimo *Curso de Analyse Infinitesimal*, in tre volumi (1891-3) e di cui il primo volume ha avuto l'onore di tre edizioni (1896). Questo corso (Vol. 3.°) contiene la teorica delle funzioni intere trascendenti, quella delle funzioni di variabile complessa, delle funzioni ellittiche (secondo Weicostrass), ecc.

Digitized by Google

piana; con procedimenti semplici ed eleganti sono dimostrate numerose e nuove proprietà di alcune notevoli curve algebriche. Notevolissimo sopratutto è lo studio analitico sulle curve parallele all'ellissi (toroidi), nei Mém. couronnés et autres mém. de l'Ac. Roy. de Belgique (1898), fondato sulla rappresentazione di Cauchy. La considerazione delle podarie di queste curve, che sono curve cicliche così frequenti nelle applicazioni della Meccanica, conduce a stabilire alcune nuove proprietà della lemniscata ellittica ed iperbolica. Ancora da notare la breve nota « Sur la courbe équipotentielle » (Archiv. d. Math. u. Physik. 1902, 3); cioè sulla curva equipotenziale dell'attrazione, secondo la legge di Newton di due masse m ed m'.

Un articolo bibliografico su Daniel da Silva dà conto della vita scientifica di questo valoroso e poco noto matematico portoghese (1814-1878) la cui *Memoria sopra la rotazione delle forze intorno ai punti di applicazione* (1851), benchè scritta dopo i famosi lavori di Möbius (1837) e di Minding (1835-36), per l'eleganza del metodo, per i suoi risultati anteriori ad alcuni del Darboux (1877), meriterebbe di essere tratta dall'oblio (1).

Ognuna delle memorie di questo primo volume è scritta, come in origine, in francese o in portoghese, ed arricchita di nuove considerazioni e di note bibliografiche.

Messina, luglio 1904.

R. Marcolongo.

L. Schläfli. — *Theorie der vielfachen Kontinuität*. Herausgegeben von J. H. Graf (Separatabdruk aus den Denkschriften des Schw. naturf. Gesell. Bd. XXXVIII, 1901). 4.°, p. 240.

L. Schläfli, incoraggiato dalla benevola accoglienza che l'Accademia di Vienna fece al suo lavoro *Ueber die Resultate eines Systems mehrerer algebraischer Gleichungen*, l'8 Ottobre 1852 presentava alla stessa il voluminoso manoscritto di una teoria delle varietà lineari e quadratiche in uno spazio comunque esteso, del quale egli chiedeva l'inserzione nelle memorie accademiche. Ma, sia per l'estensione del lavoro, sia per l'eccessiva novità del tema, non conseguì il suo scopo. Del pari infruttuosi rimasero gli sforzi che lo Schläfli (in ciò cordialmente aiutato dallo Steiner) fece per ottenere l'accoglimento del suo scritto nel Giornale di Crelle-Borchardt; sicchè esso finì per rimanere

(1) Su D. da Silva e sull'altra importante sua memoria *Proprietà generali e risoluzione diretta delle congruenze binomie* (1852) vedi un articolo del Prof. C. Alasia: *Sullo stato della teoria delle congruenze binomie avanti il 1852*. Rivista di Fisica, Matem. ecc. Pavia T. 4. 1903.

Digitized by Google

inedito. Il Prof. Gräfe, avendolo ritrovato fra le carte dell'illustre estinto, conservate nella Biblioteca cantonale di Berna, pensò fosse il caso di pubblicarlo. E di ciò gli va tributato ampia ed incondizionata lode perchè, se da un lato questa memoria aumenta l'importanza del posto che spetta allo Schläfli nella storia della geometria a n dimenzioni (1), dell'altro mostra che egli in tale campo si spinse oltre al punto a cui giunsero coloro, che senza averlo a guida, vi si avventurarono: onde, a differenza di molte pubblicazioni postume, la presente non solo ha un valore storico, ma presenta un cospicuo interesse scientifico.

G. L.

Annuaire pour l'an 1905 publié par le Bureau des Longitudes. Paris, Gauthiers-Villars, 16.°, p. IV + 559 + 74 + 44.

Per non ripetere gli elogi fatti ai precedenti volumi di questa raccolta, ci limiteremo a segnalare la 2.ª Parte, in esso contenuta, della *Theorie élémentaire des marées* di P. Hatt, di cui la 1.ª venne inserita nell'*Annuaire pour l'an 1904.*

NECROLOGIO

PAOLO TANNERY

DI GINO LORIA

Non è all'indomani della scomparsa di un uomo del valore di Paolo Tannery che si possa, da parte di chi fu a lui legato da sincera amicizia, redigere freddamente ed esattamente il bilancio dei progressi che a lui sono debitori i varî rami del sapere, a vantaggio dei quali spese l'ammirabile sua attività. Ma poichè in un giornale, quale è il nostro, dedicato alla storia delle scienze esatte la perdita di una tale personalità non può nè deve passare inosservata, vogliamo

(1) Cfr.: *Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche.* (Torino 1896) p. 304, 305, 315.

Digitized by Google

se non altro segnare qui le date principali della sua gloriosa esistenza e ricordare almeno alcune delle opere che assicurano al Tannery un posto cospicuo nella storia del pensiero francese nel corso del Sec. XIX (1).

Nato a Mantes il 20 Dicembre 1843, Paolo Tannery entrò nella Scuola politecnica nell'Autunno del 1861 e ne uscì due anni appresso, col grado di allievo-ingegnere alla Scuola di applicazione per la coltivazione dei tabacchi. In tale amministrazione egli era destinato a rimanere tutta la vita, percorrendone rapidamente tutti i gradi: sotto-ingegnere (1865), sotto-capo ufficio al Ministero delle finanze (1867), direttore dei lavori a Bergerac (1871) e Bordeaux (1875), ingegnere della manifattura dei tabacchi all'Havre (1877) e poi a Parigi (1883), direttore al Ministero delle finanze (1890) e finalmente (dal 1894) direttore delle manifatture dei tabacchi a Pantin (vicino a Parigi). In tutti gli stadi della sua carriera adempì con zelo ed energia esemplari gli uffici successivamente affidatigli dal governo, cattivandosi in pari tempo, con la sua bontà e giustizia, l'ammirazione e l'affetto di tutti i suoi dipendenti, a partire dai suoi inferiori diretti sino all'ultimo de' suoi operai: solenni quindi furon gli onori che a lui vennero tributati, quando la sua tomba fu immaturamente ed improvvisamente dischiusa (27 Novembre 1904), da ogni classe di cittadinanza: basti dire che, mentre non mancarono i rappresentanti del governo e dell'università, vi prese parte anche un povero operaio di Bordeaux, il quale affrontò i disagi di due notti di viaggio per rendere un ultimo omaggio al suo antico superiore!

Ma nel mentre Paolo Tannery dedicava tanta parte della sua bella intelligenza al servizio dello stato, consacrava tutti i momenti d'ozio che gli restavano allo studio profondo della lingua e della filologia greca, nell'intento di chiarire i punti tuttora controversi della storia dell'epoca in cui il genio del popolo ellèno rifulse nella sua più splendida gloria. I frutti di tali geniali e coscienziosi studi cominciarono ad essere resi di pubblica ragione nel 1876, fra le *Memorie* della Società delle scienze fisiche e matematiche, fondata allora a Bordeaux e da allora in poi si seguirono in lunga ed ininterrotta teoria (secondo un calcolo dello stesso Tannery tali lavori riempieno non meno di 1200 pagine). Lo spazio non consentendoci di darne qui l'elenco, ci limitiamo a ricordare i tre omai celebri volumi *Pour l'hi-*

(1) Ulteriori notizie si troveranno nei due opuscoli: *Notice sur les travaux publies par* M. PAUL TANNERY (Septembre 1883); *Titres scientifiques de* M. PAUL TANNERY (22 Avril 1903).

Digitized by Google

stoire de le science hellène (1887), *La géometrie grecque* (1887) e *Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne* (1893), che ne compendiano le conclusioni più originali, e l'edizione di Diofanto, che da sola basterebbe ad assidere sopra solide basi la sua fama di filologo di primo ordine. Aggiungiamo che alcuni lavori, scritti alla vigilia della sua morte e pubblicati di poi, stanno a provare il suo interesse incessante per la storia del pensiero scientifico greco.

Con l'importante opuscolo sopra *La correspondance de Descartes dans les inédits du fonds Libri* (1893) il Tannery si è poi affermato come investigatore profondo anche della storia del periodo cartesiano, qualità questa che emerge in meridiana luce anche grazie all'edizione delle *Oeuvres de Fermat*, di cui il Tannery pubblicò tre volumi (1891, 1894, 1896) (1) in collaborazione coll'Henry, e della corrispondenza di Descartes (in cinque splendidi volumi, 1897-1903), che egli potè portare a compimento in unione con l'Adam.

Nè va taciuto che, con la pubblicazione di alcuni testi medioevali da lui fatta nella notissima raccolta di *Notices et extraits des manuscrits*, e con le prefazioni apposte ad altri documenti inseriti nella stessa collezione, egli si è rivelato conoscitore perfetto anche dello stato della scienza nell'Età di Mezzo.

La vastità del campo abbracciato delle investigazioni del Tannery e la profondità delle stesse, nonchè la buona prova come insegnante da lui fatta tanto quando nel 1885 egli tenne alla Sorbona un corso sulla storia della numerazione, quanto allorchè suppli (1891-94) il Levèque al Collegio di Francia nel corso di filologia classica, designavano il Tannery per un insegnamento di storia delle scienze. Onde, quando per la morte di P. Lafitte (4 Gennaio 1903) restò vacante nel Collegio di Francia la cattedra di storia generale delle scienze, da lui degnamente occupata per un decennio, a tutti parve che a succedergli fosse inevitabilmente destinato Paolo Tannery; i voti concordi emessi dal Collegio di Francia (addì 31 Luglio 1903) e dall'Accademia delle scienze (seduta del 7 Dicembre 1903) cullarono gli estimatori ed amici di lui nell'illusione che la sua nomina fosse assicurata. Invece, con decreto del 29 Dicembre 1903, il Chaumié, allora ministro della pubblica istruzione, chiamò altra persona a succedere al Lafitte! Non ci faremo eco dell'indignazione unanime che accolse tale ingiusta deliberazione. Effemeridi serie come il *Journal des Débats* (v. il n.° dell'8 Febbraio 1904); personalità occupanti cospicue posizioni politiche, quali P. Baudin, antico ministro dei lavori pubblici (v. una

(1) Un quarto, di più modeste proporzioni, destinato a completar l'opera, doveva uscir nel 1906; auguriamo che se ne trovino i materiali fra le carte dell'illustre estinto.

Digitized by Google

lettera al Chaumié, pubblicata in *Le Siècle*); e persino il Nestore degli storici della matematica, M. Cantor (v. il vivace discorso pronunziato al Congresso internazionale di Heidelberg), protestarono vivamente contro tale deplorevole risultato di inframettenze politiche in questioni che dovrebbero essere risolute soltanto in base a considerazioni obbiettive; se i molti amici del Tannery non promossero una violenta agitazione in di lui favore, gli è che temevano rappresaglie governative, che, allontanandolo da Parigi, l'avrebbero costretto ad interrompere le sue fortunate ricerche archivistiche. Paolo Tannery assistette da forte al tramonto del sogno della sua vita e concentrò tutta la sua invidiabile energia a svolgere, in articoli di riviste ed in volumi speciali, le idee che egli aveva sperato di potere esporre dalla cattedra del Collegio di Francia. Una morte improvvisa, a cui forse non fu estraneo il dolore pel torto subito, troncò sul principio l'effettuazione di tale programma! Questa idea, il pensiero che Paolo Tannery non ci ha dato tutto quello che avrebbe potuto, rende più acuto il cordoglio per la sua dipartita: possa l'egregia Donna, che di lui fu per lunghi anni compagna affezionata e collaboratrice intelligente, trovare fra le carte da lui lasciate il materiale per ricostruire l'opera che sarebbe stato il testamento scientifico dello strenuo indagatore.

NOTIZIE

Storia della Tecnica. A partire dal fascicolo 15 Dicembre 1904 la reputata rivista *Die Welt der Technik* (Berlin, Elsner) contiene una rubrica sulla storia delle innovazioni tecniche, redatta dall'Ing. F. M. Feldhaus, del quale è noto l'attivo interesse per tale soggetto. Tale innovazione riscuoterà certamente il plauso di tutti coloro che s'interessano a seguire lo svolgimento del pensiero umano sotto tutte le svariate sue forme.

***

Abhandlungen zur Geschichte der math. Wissenschaften. — Il Vol. XVIII di quest'importante collezione di monografie storiche contiene tre lavori. Il primo è di un veterano, J. L. Heibeng, (*Mathematisches zu Aristoteles*) e porge notizie esatte intorno alle cognizioni matematiche di Aristotele; tale soggetto non è nuovo, ma è trattato in maniera esauriente. Il secondo è di un recluta, C. H. Müller

Digitized by Google

(*Studien zur Geschichte der Mathematik*), e tratta a fondo dell' insegnamento matematico a Gottinga nel periodo pregaussiano. Il terzo poi è un notevole contributo alla storia critica della meccanica; è dovuta a R. Lindt ed ha per titolo: *Das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten, seine Beweise und die Unmoglichkeit seiner Umkehrung bei Verwendung des Begriffes « Gleichgewicht eines Massensystems »*.

Il Vol. XIX della stessa raccolta possiede più che un valore storico; nel suo contenuto rispecchiasi il crescente interesse che si va manifestando per tutto che concerne i patriarchi della geometria non-euclidea. Esso contiene la versione tedesca di due lavori di Lobatschefskij, dei quali ben pochi matematici avevano sinora potuto prendere conoscenza. Alludiamo alla *Geometria imaginaria* ed all'*Applicazione della geometria imaginaria ad alcuni integrali*, pubblicati nel *Messaggero di Kasan* 1835 e 1836. H. Liebmaun, autore della traduzione che annunziamo, non solo ha corretti gli errori di calcolo o di stampa esistenti nell'originale, ma con copiose note ne ha agevolata l'intelligenza; per tale sua non lieve fatica merita il nostro plauso e la nostra gratitudine.

***

PUBBLICAZIONI RECENTI SULLA STORIA DELLA MATEMATICA. — A. Favaro. *Amici e corrispondenti di Galileo Galilei.* XI. CESARE MARSILIA. Atti e Memorie della R. Dep. di Storia patria per la Romagna, 3.ª Ser., Vol. Vol. XXII, 1904. (Interessante; specialmente pei nuovi dati relativi a B. Cavalieri che contiene). XII, VINCENZO RENIERI. Atti del R. Istituto Veneto, T. LXIV, Parte 2.ª. (Di questo genovese egregio, discepolo di Galileo e lettore nell'Università di Pisa, il Favaro riuscì ad accertare le date estreme dell'esistenza (30 Maggio 1606, 5 Novembre 1647) ed a lumeggiarne completamente la figura).

H. BOSMAN. *La méthode d'Adrien Romain pour effectuer les calculs des grands nombres.* Annales de la Soc. Scient. de Bruxelles, T. XXVIII, 2.ª Partie. (Contiene un'opera del celebre calcolatore olandese, sino ad ora inedita, il cui originale trovasi nella Biblioteca universitaria di Louvain; è importante per la storia dell'aritmetica pratica).

B. P. MOORS. *Le système des poids, mesures et monnaies des Israelites d'après la Bible.* Paris, Hermann, 1904. (Prezzo L. 4). (Queste dotte e profonde ricerche sono destinate ad accendere fiere dispute fra i cultori di studî biblici per le tesi originali che ne formano il coronamento; citeremo fra esse quella sola che interessa direttamente i matematici, cioè che gli Ebrei conobbero un valore di π assai più prossimo di quello (3) che si riteneva ad essi noto, cioè $\pi = 3.242$).

Digitized by Google

F. SCHUR. *Johann Heinrich Lambert als Geometer. Festschrift bei dem feierlichen Akte des Rektorats-Wechsels an der techn. Hochschule zu Karlsruhe, am 18 November 1904* (Karlsruhe, 1904).

***

BIBLIOTECA SCOLASTICA. — P. Gazzaniga. *Libro di aritmetica generale e di algebra elementare, ad uso delle Scuole secondarie.* IV ed. notevolmente accresciuta e migliorata, p. 322+96. Prezzo L. 3,50. (v. *Bollettino*, T. III, 1900, p. 111-115).

***

Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées. — Annunciamo con piacere che gli sforzi fatti per tradurre in francese la grande « enciclopedia delle quattro Accademie » hanno condotto ad un risultato ancora più soddisfacente di quanto era dato prevedere. Non si tratta già di una semplice versione di quell'opera, ma di rifacimenti dei singoli articoli, fatti da specialisti, sotto la direzione del Prof. Molk (dell'Università di Nancy). Il semplice confronto degli articoli sinora pubblicati in francese con i corrispondenti originali prova che le notizie aggiunte sono numerose ed importanti; onde nell'interesse degli studi matematici, è da augurare che la pubblicazione dell'enciclopedia nella sua nuova veste prosegua in modo sollecito secondo il piano saggiamente stabilito.

***

TEMA PROPOSTO DALL'ACCADEMIA DI MADRID PER L'ANNO 1906. — « Calcolare e disporre ordinatamente in tavole numeriche i valori di una o più funzioni trascendenti che siano utili e di uso frequente nelle applicazioni delle matematiche e che ciò non ostante non siano state ancora calcolate ». Il lavoro dovrà avere circa la estensione delle solite tavole trigonometriche ed essere disposto in modo comodo; l'approssimazione sarà determinata dall'uso a cui sono destinate le funzioni considerate. Scadenza 31 Dicembre 1906.

Bestonzo Pietro, Gerente.

Genova - Tipografia R. Istituto Sordomuti - 1904.

Digitized by Google

ANNO VIII. APRILE, MAGGIO E GIUGNO 1905.

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA
E STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA DI

GINO LORIA

Editore: **Carlo Clausen, Hans Rinck** Succ. Torino — Del *Bollettino* si pubblicheranno ogni anno quattro fascicoli di almeno 32 pag. — Prezzo d'abbonamento annuo: Per l'interno L. **6**, per l'estero Fr. **7.50**. Numeri separati L. **2** caduno. Gli articoli da inserirsi si mandino al *Prof. G. Loria*, Università di Genova.

SOMMARIO

R. BONOLA. *Un teorema di Giordano Vitale da Bitonto sulle rette equidistanti.*

Recensioni ed annunzi: *Oeuvres de Laguerre* II [G. L.]. — *Correspondance d'Hermite et Stieltjes.* I [G. L.]. — G. VIVANTI, *Théorie des groupes* [U. Amaldi]. — FUCHS, *Werke.* I [G. L.]. — BURALI-FORTI, *Lezioni di geometria metrico-proiettiva* [G. Vacca]. — FIEDLER, *Darstellende Geometrie.* I [G. L.]. — CLASSEN, *Elektrizität und Magnetismus* [A. Garbasso]. — GIBSON, *Treatise on Graphs* [G. L.]. — POGGENDORFF, *Handwörterbuch.* IV [G. L.]. — AHRENS, *Scherz und Ernst* [G. L.]. — CESÀRO, *Allg. Analysis und Differentialrechnung* [G. Vivanti]. — SYLVESTER, *Collected Papers*, I [G. L.]. — LEJEUNE-DIRICHLET, *Bestimmte Integrale* [G. Vivanti]. — BARDEY, *Sammlung* [G. L.]. — FORT e SCHLÖMILCH, *Analytische Geometrie* [G. L.]. — SEGUIER, *Groupes finis* [G. Vivanti]. — TANNERY, *Introd. à la théorie des fonctions* I [F. Giudice]. — KONIGSBERGER, *Jacobi* [G. L.]. — HOLZMÜLLER, *Vorbereitende Einführung in die Raumlehre* [G. L.].

Notizie: Medaglia Guccia. — I premi dell'Istituto di Francia. — Indice generale degli Annali di matematica. — Monumento a Vega. — La matematica dei Giapponesi. — Tema proposto dall'Accademia Danese.

UN TEOREMA DI GIORDANO VITALE DA BITONTO SULLE RETTE EQUIDISTANTI.

NOTA DI ROBERTO BONOLA

1. P. STÄCKEL e F. ENGEL, nella loro pregevole « *Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss* » (1), dopo aver notato che nei secoli XVII e XVIII i geometri e commentatori di EUCLIDE tendevano a riguardare le parallele come rette equidistanti, osservano che GIORDANO VITALE DA BITONTO [1633-1711], pur accettando questa idea, fu il primo a riconoscere la necessità di dimostrare che il luogo dei punti equidistanti da una retta è una retta [cfr. opera citata, p. 33]. Per quanto interessante sia questo dato, tuttavia ci sembra che la

(1) Teubner, 1895.

Digitized by Google

parte più notevole delle ricerche sulle parallele di GIORDANO, non abbia fermato l'attenzione dei predetti autori. Richiamare e porre in rilievo questa parte veramente notevole ci sembra doveroso, tanto più che servirà a stabilire la priorità di GIORDANO intorno ad una idea, ampiamente e completamente sviluppata dal Padre GEROLAMO SACCHERI [1667-1733], un mezzo secolo dopo.

2. La dimostrazione di GIORDANO sulla esistenza di rette equidistanti (1) è insufficiente, perchè dipende sostanzialmente dall'erronea applicazione d'un certo lemma, relativo alle distanze dei punti d'una curva da una retta del suo piano. In questo senso i teoremi di GIORDANO non aggiungono nulla a quanto i precedenti commentatori avevano detto intorno alle rette equidistanti. Ma insieme al predetto lemma GIORDANO stabilisce un'altra proposizione, che deve ritenersi la parte saliente delle sue ricerche sulle rette equidistanti. Eccone l'enunciato:

Se due rette linee uguali, come AB, CD, sono in un medesimo piano, e fanno angoli retti con qualch'altra linea retta BD, tirata la retta AC, se dalla retta AC cade qualche retta linea EF perpendicolare a BD ed uguale ad AB, overo CD. Dico che ogn'una delle altre rette, che dalla linea AC cadono perpendicolari alla retta BD, sarà uguale ad AB, overo CD.

Riassumiamone brevemente la dimostrazione. Premesso che: « *Se due lati opposti d'un quadrilatero sono fra di loro uguali, e fanno angoli uguali con uno degli altri due lati, i rimanenti due angoli sono fra di loro uguali* » (2), in forza delle ipotesi contenute nel precedente enunciato, si ricavano le seguenti uguaglianze angolari:

$$B\widehat{A}E = A\widehat{E}F \;\; ; \;\; F\widehat{E}C = E\widehat{C}D \;\; ; \;\; B\widehat{A}C = A\widehat{C}D,$$

dalle quali si deduce:

$$A\widehat{E}F = F\widehat{E}C.$$

E poichè questi due angoli sono supplementari, ciascuno di essi sarà retto e quindi retti tutti gli angoli sopra nominati.

Sia ora G un punto arbitrario della retta AC, situato fra A e C. Se la perpendicolare GH, calata su BD non fosse uguale ad AB, sarebbe minore ovvero maggiore. Pongasi, ad es., $GH > AB$. Allora

(1) Cfr. l'« *Annotatione* » all'« *Euclide restituto* » di GIORDANO VITALE [1680], p. 45-56. I teoremi contenuti in questa « *Annotatione* » dovrebbero servire a dimostrare il *V. postulato di Euclide*.

(2) Questa proposizione data da GIORDANO si trova già nell'« *Euclidis elementorum* etc. » di C. CLAVIUS [1574].

Digitized by Google

su G H si prenda il segmento I H uguale ad A B e si congiunga I con i punti A, C. Avremo allora le seguenti uguaglianze fra angoli:

$$(1) \qquad B\widehat{A}I = A\widehat{I}H \; ; \; H\widehat{I}C = I\widehat{C}D.$$

E poichè i due angoli $B\widehat{A}I$, $I\widehat{C}D$ sono entrambi acuti, così la somma: $A\widehat{I}H + H\widehat{I}C$ sarà minore di due angoli retti. D'altra parte, in forza del teorema dell'angolo esterno di un triangolo [EUCLIDE, XVI], avremo:

$$A\widehat{G}H < A\widehat{I}H \; ; \; H\widehat{G}C < H\widehat{I}C,$$

da cui, sommando membro a membro:

$$A\widehat{G}H + H\widehat{G}C < A\widehat{I}H + H\widehat{I}C;$$

o ciò che fa lo stesso:

$$2 \textit{ angoli retti} < A\widehat{I}H + H\widehat{I}C.$$

Questa relazione contraddice la precedente:

$$A\widehat{I}H + H\widehat{I}C < 2 \textit{ angoli retti.}$$

Segue che G H non può essere maggiore di A B. Analogamente si dimostra assurda l'ipotesi $GH < AB$, quindi risulta $GH = AB$.

3. In questo ragionamento GIORDANO si riferisce esplicitamente al caso in cui il punto G appartenga al segmento A C. Si può facilmente completare la dimostrazione, nell'ipotesi in cui G stia sul prolungamento di A B, ad es. verso destra. Ragioniamo come sopra, supponendo $GH > AB$, ed $IH = AB$. Dedurremo allora le uguaglianze (1). Ma pel teorema dell'angolo esterno abbiamo: $I\widehat{A}C < I\widehat{C}G$, quindi $B\widehat{A}I > I\widehat{C}D$, od anche, in forza delle (1):

$$A\widehat{I}H > H\widehat{I}C.$$

Ma dall'esame diretto della figura risulta invece:

$$A\widehat{I}H < H\widehat{I}C,$$

sicchè cade l'ipotesi $GH < AB$, quindi si ricava: $GH = AB$.

4. Mutiamo un po' la forma del teorema di GIORDANO. Dato il quadrilatero A B D C, *birettangolo* [$\widehat{B} = \widehat{D} = 1$ retto] *ed isoscele*

Digitized by Google

[A B = D C], l'ipotesi E F = A B, *equivale* all'altra $B\widehat{A}C = A\widehat{C}D$ = 1 retto (1). Sicchè il teorema sopra dimostrato può enunciarsi nella forma seguente:

Se in un solo quadrilatero birettangolo isoscele, gli ulteriori due angoli sono retti, essi saranno retti in ogni altro quadrilatero birettangolo isoscele.

L'ipotesi che gli ulteriori due angoli di un quadrilatero birettangolo isoscele siano retti è quella che il Padre SACCHERI chiama « *ipotesi dell'angolo retto* » (2), sicchè la V proposizione di SACCHERI: « *Se in un solo caso è vera l'ipotesi dell'angolo retto, essa è vera in ogni caso* » non è altro che il riportato teorema di GIORDANO.

E poichè l'« ipotesi dell'angolo retto » *equivale* all'altra: *la somma degli angoli d'un triangolo è uguale a due angoli retti*, così il teorema: *Se in un solo triangolo la somma degli angoli è uguale a due angoli retti, in ogni altro triangolo la somma degli angoli è pure uguale a due angoli retti,* una volta attribuito a LEGENDRE, poi rivendicato a SACCHERI, ha la sua radice nell'opera di GIORDANO.

V'è di più. Nelle dimostrazioni di SACCHERI e LEGENDRE viene utilizzata l'*ipotesi archimedea*, in quella di GIORDANO, completata come si disse al n.° 3, l'*ipotesi archimedea* non compare affatto. Si può quindi in certo modo far risalire a GIORDANO uno degli interessanti risultati contenuti in una recente memoria di M. DEHN (3), e precisamente il teorema: *Anche prescindendo dal postulato di Archimede, dall'ipotesi che la somma degli angoli di un solo triangolo sia uguale a due angoli retti, si deduce che in qualsiasi triangolo la somma degli angoli è uguale a due angoli retti.*

Pavia, Gennaio 1905.

---

(1) Rileviamo con precisione il significato di *equivalenza fra due ipotesi*. Supponiamo che una teoria deduttiva sia fondata su di un certo *sistema fondamentale* di ipotesi, che denoteremo con $[\alpha, \beta, \gamma \ldots . \mu]$. Siano poi π ed ω due *nuove* ipotesi, tali che dal sistema fondamentale $[\alpha, \beta, \gamma, \ldots \mu, \pi]$ possa dedursi ω, e che dal sistema fondamentale $[\alpha, \beta, \gamma, \ldots \mu, \omega]$ possa dedursi π. Allora le due ipotesi π, ω si diranno equivalenti. *relativamente* al sistema fondamentale assunto. — Le ipotesi sul quadrilatero birettangolo isoscele, di cui sopra, sono, in questo senso, equivalenti relativamente al sistema di postulati, che nella geometria ordinaria caratterizzano i concetti di punto, piano e figure congruenti.

(2) Cfr. l'« *Euclides ab omni naevo vindicatus* » di SACCHERI.

(3) Cfr. « *Die Legendre'schen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck* ». Math. Ann. Bd. 53, p. 405-439, [1900].

Digitized by Google

RECENSIONI ED ANNUNZI

Oeuvres de LAGUERRE publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences par MM. CH. HERMITE, H. POINCARÉ et H. ROUCHÉ, T. II. *Géometrie.* Paris, Gauthier-Villars, 1905, 8° gr., p. 715 [Prezzo 22 fr.].

Il II ed ultimo volume delle opere di Edmondo Laguerre (cfr. *Bollettino*, T. I, 1898, p. 46-49), che ci affrettiamo a segnalare ai nostri lettori, abbraccia tutta la produzione geometrica dell' eminente scienziato francese, nonchè una memoria intorno alle frazioni continue algebriche che, per errore, non venne inserita nel I.

Gli argomenti svolti nei lavori che quel volume accoglie sono vari e non sempre a prima giunta se ne scorge il legame. Ma uno studio attento di essi mostra come il Laguerre, durante tutta la sua vita, sia stato dominato dalle idee sopra l'applicazione degli immaginari alla geometria, che in germe trovansi già nel lavoro sui fuochi, con cui egli esordì diciottenne. Di tale idee sembra che più volte egli abbia progettato una esposizione metodica, ma, distratto dall'affollarsi di nuovi pensieri, mai la condusse a termine; chi tentasse di farlo in vece sua compirebbe opera veramente meritoria, tanto più che, approfondendo le applicazioni genialissime che il Laguerre stesso ne fece, troverebbe lo stimolo e l'occasione di farne delle nuove.

Un altro argomento al quale il nostro autore consacrò lunghe ricerche verso il termine della sua esistenza è (per adoperare la sua nomenclatura) la « trasformazione per direzioni reciproche »; le brillanti applicazioni che egli ne fece l'additano come un campo fertile; ond'è deplorevole che altri non l'abbia seguito nel coltivarlo; la presente pubblicazione verrà forse a richiamare su di esso l'attenzione degli studiosi.

Un ultimo ordine di ricerche, in cui il Laguerre impresse un'orma che non si cancellerà, è l'applicazione della teoria delle forme algebriche alla geometria della curva e delle superficie: un commento ad alcuni del relativi lavori, che si sta attualmente pubblicando, sembra destinato ad assicurare loro la meritata notorietà presso di noi (1).

Non ci è lecito chiudere questo cenno senza segnalare la quantità di bellissimi risultati geometrici ottenuti dal Laguerre, applicando i me-

(1) Camilla Decio, *Studio sull' equazione mista di una curva piana algebrica* (Riv. di mat. fis. e scienze naturali, 1905).

Digitized by Google

todi di cui è creatore, la quale è testimonio della straordinaria fantasia geometrica di cui era dotato; nell' immaginare applicazioni egli è così meravigliosamente felice che quasi involontariamente si è indotti a paragonarlo ad un altro geometra che a breve distanza lo seguì nella tomba, a Sophus Lie!

G. L.

Correspondance d' Hermite et de Stieltjes, publiée par les soins de B. Baillaud *et* H. Bourget. *Avec une préface de* E. Picard, T. I. (8 Novembre 1882 — 22 Juillet 1894). Paris, Gauthier-Villars, 1905. 8° gr. p. XX+477.

Tommaso Giovanni Stieltjes nacque a Zwolle (Olanda) il 29 Dicembre 1856. Compiuti a Delft gli studi liceali, egli entrò nella scuola politecnica di quella città; malgrado la sua superiorità indiscutibile ed indiscussa egli ne uscì senza il diploma d' ingegnere, non avendo, per due volte, saputo vincere l' avversione che gl' ispiravano i pubblici concorsi. Grazie all' appoggio d' un amico di suo padre nell'Aprile 1877, egli entrò nell' Osservatorio astronomico di Leida. In principio gli parve fosse questo un ambiente a lui confacente, ma, a misura che si svolgevano le sue ricerche personali, si accorse essere la sua vocazione pei lavori teorici; gli è appunto in quest' epoca di trasformazione (1882) che ebbe principio la sua corrispondenza con Hermite, la quale si benefica influenza doveva esercitare sui lavori di entrambi. L' importanza dei lavori pubblicati da Stieltjes nelle *Memorie* dell'Accademia di Amsterdam e nei *Comptes rendus* indussero il direttore dell' Osservatorio di Leida a dispensarlo, a partire dal 1.° Gennajo 1883, dalle osservazioni; ciò non ostante, al 1.° Dicembre dello stesso anno, egli diede le proprie dimissioni da astronomo per dedicarsi completamente alle matematiche pure. Il grande valore delle ricerche da lui compiute nel triennio 1383-85 gli procacciarono dall' Università di Leida il grado di dottore *honoris causa* e da quella di Groninga la proposta in prima linea come professore di calcolo infinitesimale; il governo olandese non avendolo nominato, nell'Aprile 1885 egli venne a Parigi. Ivi per consiglio di Hermite si addottorò (Giugno 1886) e subito dopo ottenne un posto all' Università di Tolosa, ove rimase sino al termine della sua troppo breve esistenza (31 Dicembre 1894).

Tali per sommi capi la vita di uno dei due eminenti protagonisti della pubblicazione di cui annunciamo il principio. La quale, se, per sostanziale importanza, non può gareggiare con i carteggi dei matematici del periodo Descartes-Leibniz-Eulero, sarà letta avidamente da chi s' interessa a scoprire l' origine e seguire gli stadi di sviluppo dei con-

Digitized by Google

cetti e dei metodi accolti uella scienza; nè va tacciato che alcune idee, ivi soltanto accennate, potranno essere germi di importanti investigazioni future.

G. L.

G. VIVANTI. — *Leçons élémentaires sur la théorie des groupes de transformations* professées a l'Université de Messine. Traduites par A. Boulanger, maître de conférences a l'Université de Lille. Paris, Gauthier-Villars, 1904, gr. 8; p. VII + 296. [Prezzo del volume fr. 8].

Le tre parti, in cui queste Lezioni si dividono, sono rispettivamente dedicate alla « *Teoria generale dei gruppi continui finiti di trasformazioni* », alla « *Applicazione della teoria dei gruppi di trasforzioni alle equazioni differenziali* » e alle « *Trasformazioni di contatto* ».

Nella *Prima Parte* (pagg. 1-132), come lo stesso A. dichiara nella Introduzione, è riassunto nelle sue linee generali il primo volume della « *Theorie der Transformationsgruppen* » di Lie ed Engel, del quale sono qui fedelmente riprodotti l'ordinamento e la distribuzione della materia, e sono conservati altresì i metodi e la intonazione esclusivamente analitica. È quindi assolutamente inutile che ci addentriamo in un esame dettagliato del contenuto, e ci basterà accennare come l'A., partendo senz'altro dalla definizione del più generale gruppo continuo finito in n variabili, dimostra per esso i tre teoremi fondamentali, e, stabilite le definizioni e i più semplici criteri di riconoscimento della transitività e della primitività di un gruppo, dell'isomorfismo e della similitudine di due gruppi, dia un cenno del gruppo aggiunto e dei gruppi parametrici, e, introdotti i gruppi ampliati, definisca gli invarianti differenziali.

La breve digressione su di una applicazione alle equazioni differenziali (*Parte seconda*: pagg. 133-193) deriva direttamente dai capitoli più elementari delle « *Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen* » di Lie e Scheffers, e tratta della relazione fra trasformazioni infinitesime e fattori integranti di un'equazione lineare a derivate parziali in due variabili, da la interpretazione geometrica del fattore integrante; e poi, passando al caso di più variabili, definisce e interpreta geometricamente il moltiplicatore di Jacobi e discute, nei vari casi possibili, il vantaggio che si può trarre, per la integrazione di un'equazione differenziale lineare omogenea in tre variabili indipendenti, dalla conoscenza di una o più trasformazioni infinitesime, che lascino invariata l'equazione.

Nella *Terza parte* infine (pagg. 195-293) sono riassunti i primi

Digitized by Google

capitoli del secondo volume dell'opera di Lie ed Engel, relativi alla definizione e alla costruzione delle trasformazioni di contatto, alle loro funzioni caratteristiche, e ai gruppi di funzioni, fino a riprodurre la dimostrazione che ivi da il Lie dell'inverso del terzo teorema fondamentale, cioè della possibilità di costruire un gruppo continuo finito, che ammetta un sistema arbitrario di costanti di composizione (soddisfacenti alle relazioni ben note).

In questa terza parte la redazione, che nelle due prime è chiara ed equilibrata, si fa piuttosto sconnessa e frettolosa. La materia, già di per sè più complessa, è raccolta in capitoli di comprensione molto vasta, e non ulteriormente suddivisi, per modo che spesso si susseguono l'un l'altro, in un ordine uniforme e non distinto, argomenti assai disparati; mentre d'altro canto diventano impossibili quei richiami precisi e determinati, che il soggetto, talvolta alquanto intricato, richiederebbe. E mal si comprendono le ragioni che indussero l'A. a radunare qui tanto materiale di risultati generali sulle trasformazioni di contatto e sui gruppi di funzioni, senza poi illustrarli con una qualsiasi applicazione ad alcuno di quei problemi concreti, da cui pur trassero origine codeste teorie. Giacchè non parmi ragione sufficente la accennata dimostrazione dell'inverso del terzo teorema fondamentale, la quale non presuppone affatto tutte codeste teorie, ma richiede solo poche e semplici premesse analitiche (cfr. Lie-Engel, t. III, pag. 599); onde avrebbero potuto benissimo trovare posto nella prima parte.

Ma lasciando oramai ogni questione particolare, risaliamo ai criteri generali, ai quali questo libro è informato. A me sembra che nella scelta di essi l'A. abbia troppo accondisceso all'indole sua e ai suoi gusti di analista ed abbia perciò trascurato di presentare le concezioni del Lie sotto l'aspetto che è per esse caratteristico. Egli, accenna appena, al principio della prima parte, alla possibilità di interpretare le trasformazioni di un gruppo come operazioni sui punti di uno spazio; dopo di che non solo rifugge sistematicamente da ogni considerazione geometrica, salvo che in un brevissimo capitolo sulle varietà invarianti (pagg. 71-72), ma omette, in tutta la teoria generale, ogni accenno ad un qualsiasi esempio determinato di gruppi, neppur di quelli che son già noti ai giovani dalla Geometria proiettiva ed analitica e fin dalla Geometria elementare (1). Alcuni fra i più semplici tipi di gruppi in due e tre variabili compariranno poi nella seconda parte sulle applicazioni alle equazioni differenziali, la quale (è doveroso affermarlo esplicitamente) è certo la parte migliore di tutto il libro: ma per la na-

(1) Il solo esempio di gruppo che si incontri in tutta la teoria generale è il gruppo lineare in una sola variabile $x' = a\,x + b$, citato a pag. 7 per verificare su di esso la proprietà gruppale.

Digitized by Google

tura analitica specialissima e l'indole assolutamente elementare delle questioni che vi son trattate, manca quasi del tutto ogni considerazione sintetica su codesti gruppi e non si va oltre la determinazione delle trasformazioni infinitesime di qualche gruppo, di cui son note le semplicissime equazioni finite, e la ricerca in qualche caso poco men che « triviale », delle equazioni finite, date le trasformazioni infinitesime. Così di quasi tutti i numerosi risultati generali, cui l'A., nella prima parte, arriva dopo sviluppi analitici spesso non indifferenti, non viene poi mai fatta neppur la più modesta applicazione ad alcun caso concreto; e questo accade, per esempio, di tutto quanto riguarda la transitività e la primitività, l'isomorfismo e la similitudine, i gruppi ampliati e gli invarianti differenziali, i gruppi parametrici e in modo particolare il gruppo aggiunto, sulla cui definizione analitica l'A. si intrattiene con cura, mentre poi sono lasciati completamente nell'ombra la sua origine e il suo significato geometrico, che soli possono illuminare tutta quella serie di sviluppi e di calcoli, e rendere insieme ragione della parte preponderante che un tal concetto ebbe nella prima costruzione delle teorie del Lie.

È bensì vero che l'A. ha in tutto questo seguito, in gran parte, la traccia dei trattati da lui scelti a suoi modelli e in particolare del primo volume dell'opera di Lie ed Engel. Ma io credo non si debba dimenticare che il primo disegno di codesto volume nacque e si svolse nel Lie durante quel periodo della sua attività scientifica, in cui l'opera sua, già affermatasi in tutto un vasto campo di scoperte, raccoglieva ancora nel mondo matematico un riconoscimento e un consenso assai scarsi. Onde esso fu concepito quasi direi in base ad un preconcetto polemico o certamente, almeno, coll'espresso proposito di fornire una riprova analitica irrefutabile della solidità di quelle teorie, alle quali il Lie pensava fossero ancora di pregiudizio, presso la più gran parte dei matematici, l'arditezza e la novità dei suoi procedimenti sintetici. Fu così che egli credette di dover quasi dissimulare le forme native e spontanee del suo pensiero, e sostituire ad esse quelle che, come dice il Noether (1) « sono in sostanza traduzioni di un modo di concepire diverso e verifiche di verità già assodate per altro cammino ». Ma già una diversa intonazione domina nel terzo volume della medesima *Theorie der Transformationsgruppen*, compiuto quando oramai il Lie aveva visto le sue teorie imporsi a tutto il mondo matematico e rivelarsi strumenti fecondi di scoperte anche in mano di altri ricercatori. E nuove opere già erano mature nella mente del grande geometra sugli invarianti differenziali, sui gruppi infiniti, sulle teorie di integrazione, nelle quali è lecito pensare che il Lie si sarebbe

(1) Sophus Lie. Math. Ann. Bd. 53.

Digitized by Google

riaccostato ancor più alle forme originarie e schiette del suo pensiero. Così certamente egli fece nel bellissimo primo volume della *Geometrie der Berührungstransformationen* e nei tre capitoli postumi, editi recentemente dall' Engel. Chè se pure vogliamo limitarci a considerare le opere che il Lie ha effettivamente e compiutamente pubblicate, noi vediamo che, quando egli volle fornire ai principianti un corso di lezioni sulla sua teoria dei gruppi continui finiti, ideò il volume redatto dallo Scheffers, in cui si parte dallo studio geometrico dei gruppi più semplici e più noti, e, soltanto dopo che di ciascun concetto è chiarita, sulle più evidenti e suggestive applicazioni concrete, la natura e la portata, si giunge, per graduali generalizzazioni e quasi ripetendo il processo genetico dell' intera teoria, ai tre grandi teoremi fondamentali, che il Lie dimostra bensì per via analitica, ma accompagna ciascuno con un commento, in cui di ogni trasformazione di calcolo, di ogni avvedimento analitico è messo in luce il contenuto geometrico, o, quanto meno, il motivo sintetico. Insomma l' opera del Lie, non quale, forse, può apparire dall' uno o dall' altro dei suoi volumi, ma quale emerge da tutta la molteplice sua produzione originale, è ispirata ad una concezione essenzialmente, quasi esclusivamente geometrica, ed è dominata tutta dall' uso più ardito, più fecondo, più raffinato della intuizione spaziale. Questi, a mio parere, sono i caratteri e i pregi salienti delle scoperte e dei metodi di Sophus Lie; onde io credo che non sia possibile trascurarli, senza togliere all' opera del sommo geometra norvegese quanto essa ha di più nuovo, di più estetico, di più geniale.

UGO AMALDI.

L. FUCHS. *Gesammelte mathematische Werke. Herausgegeben von* R. FUCHS *und* L. SCHLESINGER. I. *Band. Mit einem Bildnisse des Verfassers.* Berlin, Mayer und Müller, 1904. 4°, p. XIII+476.

Fra le prove di ammirazione che uno scienziato può ricevere nessuna è più lusinghiera per lui e più utile ai posteri di quella che consiste nel raccogllere con amorosa cura e ripubblicare in tutto organico i suoi lavori. Tale omaggio, che tuttora attendono, ad esempio, Kummer, Clebsch e Chasles, sta per essere tributato a L. Fuchs, per merito del di lui figlio e di un illustre ed affezionato discepolo, ajutati in ciò da uno solerte editore, che volle degnamente continuare la collezione di lui inaugurata pubblicando le opere di Weierstrass e Schering.

Il I vol. sinora uscito della pubblicazione che segnaliamo ai nostri lettori comprende 18 lavori; si apre con la ristampa della Dissertazione di laura dell' autore e chiudesi con l' ultimo che egli scrisse prima del suo trasferimento a Heidelberg (Aprile 1875) e comprende le prime

Digitized by Google

fra le celebri memorie del Fuchs sulle equazioni differenziali lineari. Tutte vennero sottoposte ad un accurata revisione e sono accompagnate da sobrie, ma importanti, note, alcune delle quali recanti la firma del Dedekind. Quando avremo aggiunto che la correzione e l'eleganza della stampa fanno sì che l'aspetto esterno di tale pubblicaziooe corrisponda al suo intrinseco valore, avremo aggiunto l'ultimo argomento per renderla desiderata e cara a qualunque analista.

G. L.

C. Burali-Forti — *Lezioni di geometria metrico-proiettiva* — Torino, Bocca, 1904, 8°, p. XII+303. [Prezzo L. 8].

> . . . quand on est accoustumé à une méthode, on a raison de ne pas la changer aisément, quoyqu'on conseillerait peut-estre à d'autres, qui n'en ont encor aucune, de se servir de celle qui paroist la plus naturelle.
>
> Leibniz ad Huygens, 1690; Math. S. t. 2, p. 50.

Il calcolo geometrico divinato da Leibniz e creato da Grassmann e da Hamilton non ha ancora conquistato il posto che gli spetta nella matematica. La eleganza e la potenza di questo calcolo, sia come strumento di ricerca, sia come metodo di esposizione, non sono ancora universalmente riconosciute.

Mi pare quindi opportuno di accennare a qualcuna delle difficoltà che si frappongono all'estendersi di queste teorie, parlando di un libro, come quello che ci sta dinnanzi, nel quale esse sono adoperate con una applicazione costante ed uniforme.

La prima difficoltà che si incontra è il naturale misoneismo di chi è già padrone di uno strumento che può fino ad un certo punto competere in molti campi colla nuova nomenclatura.

È un fatto psicologico che, sotto la forma più semplice si osserva bene nelle resistenze che ha incontrato la sostituzione del sistema metrico decimale ai vecchi sistemi locali. La maggior ripugnanza ad adottare le nuove misure proviene dalla necessità, per molte persone di una certa età, di *riconoscere* nelle nuove misure, le antiche.

Queste resistenze non sono sempre state inutili. Varie ed importanti memorie di Cayley non ebbero altra origine che il desiderio di questo sommo matematico di interpretare e ritrovare col linguaggio della geometria analitica molte scoperte di Hamilton. La fecondità di questi contatti è una prova indiretta dell'importanza e del valore dei nuovi metodi.

Non mi pare quindi che si debba riporre troppa fiducia in alcuni giudizi sommari talvolta espressi da persone autorevoli, che però co-

Digitized by Google

noscono già e molto bene, le altre parti della matematica. Tali affermazioni arrecano pochissimo o nessun vantaggio alla scienza.

La prova dell'utilità di questi nuovi metodi può essere data soltanto dal confronto di esposizioni complete di varie parti della matematica, parallele ad esposizioni ora in uso.

Ed è questa difatti la via tracciata da Hamilton nei suoi monumentali *Elements of quaternions* del 1866.

Però questa via, nella quale questo libro segna un passo notevole, è aspra e faticosa più di quanto possa credersi. I primi che la percorrono sono costretti ad uscirne ad ogni passo, trascinati dalle abitudini precedenti. Si tratta di liberarsi da un numero enorme di frasi fatte, di associazioni di idee ricevute, tanto più stabili in quanto sono già state affinate e consolidate da un uso secolare. Ed è difficile anche ai sostenitori dei nuovi metodi il saper dire se la nuova frase, la nuova associazione che si sostituisce all'antica sarà veramente atta ad eliminarla.

Questa difficoltà è tale, che soli Hamilton e Grassmann riuscirono ad adoperare *soltanto* i metodi da loro creati, mentre i loro numerosi precursori e predecessori (Bellavitis....) non seppero che indicarli alle generazioni successive.

Un secondo ostacolo all'estendersi delle nuove teorie è l'ignoranza dei confini nei quali esse dovranno spaziare.

Una teoria è realmente utile soltanto quando realizza una *economia* del pensiero. È questa constatazione che Huygens fece nel 1691 a proposito del calcolo differenziale di Leibniz.

« Ie consideray ensuite pourquoy plusieurs de vos descouvertes m'estoient échappées, et je jugeais que ce devait estre un effet de votre nouvelle façon de calculer, qui vous offre, à ce qu'il semble, des veritez que vous n'avez pas même cherchées.... » (Leibniz, *Math. Schr.* t. 2, p. 98).

Il calcolo geometrico, sebbene in varie questioni offra spesso soluzioni più naturali di quelle della geometria analitica, è talvolta vinto dallà geometria elementare.

Così ad esempio, esso non ha ancora trovato una sistemazioue soddisfacente e definitiva dei suoi principî, indipendente dalla geometria elementare.

Una delle migliori vie, quella seguita dall'A., è dovuta al professor Peano (Calcolo geometrico, Torino, 1887). Essa parte da poche e semplici proprietà di geometria elementare (volume del tetraedro, ...).

Costituito però rapidamente l'algoritmo geometrico, il che l'A. fa nelle parti I e II (pagg. 1-118), si può operare *direttamente* senza alcuno sforzo intellettuale sui punti, sulle rette, sui piani.

Le proprietà metriche e proiettive sono trattate con un unico procedimento e con uguale facilità.

Digitized by Google

Nella parte III (pagg. 119-175) l'A. espone la teoria proiettiva e metrica delle coniche sotto una forma che è notevolmente più semplice di quella che si ottiene coi metodi ordinari analitici e sintetici.

Nella parte IV (pagg. 176-246) sono sviluppate ed esposte in breve spazio, premesse poche nozioni sulla estensione delle idee di limite ad una formazione geometrica variabile (derivazione ed integrazione), la teoria degli inviluppi delle curve piane, la teoria delle singolarità delle curve piane e gobbe, le formole di Frenet — l'equazione intrinseca di una linea, il parametro differenziale (che con Hamilton è un *vettore*), le proprietà delle linee di curvatura, geodetiche ed assintotiche di una superficie.

Questa parte contiene sotto forma elementare e semplicissima molte nozioni che attualmente sono sviluppate nei soli corsi superiori di geometria differenziale.

Nella parte V (pagg. 247-303) si ha la teoria generale delle omografie in tutti i sistemi proiettivi esposte in forma brevissima (sette pagine). Questa teoria viene applicata alle *collineazioni*, che danno le *omologie*, e le prospettività, insieme ai teoremi fondamentali per la geometria descrittiva; alle *polarità*, che nel piano danno di nuovo la teoria delle coniche, e nello spazio le quadriche.

Infine in alcune brevi note (pagg. 304-308 si ottengono sotto forma elementare le superficie di rivoluzione a curvatura (totale o media) costante.

Nel mentre l'A. ha cercato una rigorosa unità di metodo (egli ha voluto lottare con un'arma sola), egli pone ad ogni istante in relazione le nuove notazioni colle antiche. Cosicchè il suo libro riescirà molto utile a coloro che vogliano superare le difficoltà varie che si incontrano nello studio del calcolo geometrico, quando non possano fruire di un'insegnamento orale.

Così nella parte I (pagg. 28-38 e 47-56) si ritrovano le coordinate cartesiane e le formole fondamentali della geometria analitica. Le rotazioni nel piano (pagg. 57-63) comprendono come caso particolare la teoria delle coordinate polari. Così ancora (pagg. 64-84) sono studiate con molta eleganza varie curve oltre le coniche, le parabole dei vari ordini, logaritmica, trattrice, catenarie, cicloidi, epicicloidi, evolvente di cerchio, spirali, cissoidi, concoidi e podarie di una curva piana, curve sul toro e sulla sfera, elica, ecc.

Queste applicazioni rendono più accessibile il volume, e ne accrescono l'interesse nel lettore. Numerose figure chiare, e ben disegnate, e l'eleganza e la precisione colla quale l'editore ha stampato questo volume, che forma il decimo della sua « Biblioteca matematica », contribuiscono a rendere il libro più attraente.

Aggiungerò in fine che l'A. ha posto da vari anni alla prova del-

Digitized by Google

l' insegnamento le idee che espone e sostiene validamente in questo libro, il quale va ad aggiungersi alla schiera di quelli rivolti a semplificare e a completare l' edificio matematico tramandatoci dai nostri predecessori e che noi dobbiamo conservare e migliorare.

Aprile 1905. GIOVANNI VACCA.

W. FIEDLER. — *Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage.* 4. *Auflage.* I. Teil. Mit zahlreichen Figuren im Text und auf 2 Tafeln. Leipzig, Teubner, 1904 [Mk. 10].

Si narra che uno studente del Politecnico di Zurigo, non riuscendo ad afferrare alcuni concetti esposti nel suo manuale di geometria descrittiva, mosse lamenti all'autore per l' eccessiva concisione del testo, e ne ricevette questa risposta: *Io scrivo per gente che pensa.* Il ricordo di questo aneddoto (di cui però non garantisco l' autenticità) mi accompagnava incessantemente durante la lettura di questa nuova edizione dell' opera del Fiedler, perchè appunto la stringatezza dello stile ne fanno una delle caratteristiche esterne più spiccate; quale differenza fra questo trattato, in cui i problemi sono per la maggior parte semplicemente enunciati, e molti altri trattati congeneri, ove al lettore non è riserbato che la semplice parte passiva del contemplatore! Non vogliamo qui discutere se fra questi due sistemi antipodici non esista una via media preferibile ad entrambi, come non eleveremo obiezioni sul modo in cui il Fiedler intese ed attuò la connessione organica della geometria descrittiva con la geometria di posizione; non faremo nè una cosa nè l'altra perchè la *Darstellende Geometrie* dell' eminente professore del Politecnico di Zurigo è un' opera che ormai appartiene alla storia. L' autore stesso sembra rendersene ragione giacchè l' attuale edizione è sostanzialmente identica alla precedente; solo ne differisce per qualche ritocco e qualche aggiunta di secondaria importanza; egli così implicitamente dà prova dell' inconcussa fede che egli serba ai principî che nel 1863 lo condussero a sostenere coll' esempio la necessità di una radicale riforma nell' insegnamento della geometria descrittiva. G. L.

J. CLASSEN. — *Theorie der Elektrizität und des Magnetismus* (Sammlung Schubert XLI u. XLII; Leipzig, G. J. Goschen, 1903-1904). [Prezzo Mk. 5+7].

L'A. di questo libro si è proposto di esporre in modo semplice e chiaro la teoria dell' elettricità e del magnetismo, introducendo fin da principio i concetti di Faraday e di Maxwell. La forma dell' espo-

Digitized by Google

sizione, se presenta qualche neo dal punto di vista strettamente estetico, risponde invece assai bene alle esigenze di un primo insegnamento.

L'opera è divisa in quattro parti, che trattano successivamente l'elettrostatica, l'elettrocinetica, il magnetismo e l'elettromagnetismo; e per questo rispetto costituisce in certo modo un ritorno all'antico. In realtà, nei libri ben noti dell'Ebert e del Drude i fenomeni magnetici tengono il primo posto, e il concetto della corrente elettrica si introduce naturalmente con la considerazione di un campo a linee chiuse; solo più tardi si presentano i fatti dell'elettrostatica, come più complessi e di importanza relativamente minore.

Il Sig. Classen ha voluto tornare, come dicevo, all'ordine classico; e della sua scelta adduce alcune buone ragioni. Intanto è certo che l'elettrostatica, appunto per la sua maggiore ampiezza, si presta meglio che la teoria del magnetismo alla introduzione di certi concetti fondamentali; così per esempio riesce più chiara la differenza fra linee di forza e linee di induzione, e si possono distinguere nettamente le cariche vere e le cariche libere. D'altra parte molti fenomeni relativi alle correnti si studiano assai bene senza che sia necessario conoscere nulla di elettromagnetismo.

Con tutto questo però il riferente deve fare le sue riserve sul valore intrinseco del metodo seguito dal Sig. Classen. In apparenza i concetti più fondamentali sarebbero nel suo libro dedotti dall'osservazione immediata, ma nella realtà si tratta assai spesso di esperimenti più facili da descrivere che da eseguire; tutte quante le nozioni sul campo elettrostatico, ad esempio, linee di forza, potenziale, superficie di livello e così di seguito difficilmente si potrebbero ritrovare (se non fossero note per altra via) con le disposizioni rudimentali che il Sig. Classen impiega. Il nostro A. rimane ad ogni modo in ottima compagnia, perchè, come si sa, lo stesso appunto fu mosso dal Cornu alla grande opera del Maxwell.

***

Nella prima parte (elettrostatica) dopo un capitolo introduttivo, che contiene i fatti e le nozioni più importanti (elettrizzazione per strofinio, per influenza, per conduzione, proprietà del piano di prova, azione del dielettrico), l'A., con un procedimento nuovo ed ardito, si riferisce senz'altro ad un modello materiale. E propriamente paragona il campo elettrostatico ad un mezzo, nel quale si muove un fluido incompressibile. Deduce di qui, con molta eleganza, i concetti delle superfici di livello, delle linee e dei tubi di induzione; studia il flusso attraverso ad una superficie, le cariche apparenti, e la contemporanea rifrazione delle linee di induzione. Segue un capitolo, di interesse matematico, dove sono definiti la divergenza di un vettore, l'integrale superficiale

Digitized by Google

e l'integrale lineare, e si mostra il diverso comportamento della forza e dell'induzione.

Per le grandezze studiate l'A. introduce poi le unità, discorrendo man mano della carica, dell'energia, del potenziale e della capacità.

A questo punto taluni dei resultati precedentemente ottenuti vengono confrontati con l'esperienza. E il processo è generale, e si ripete in tutta quanta l'opera, preferendo l'A., come dichiara nella prefazione, di procedere per gradi e di seguire lo sviluppo storico della scienza, piuttosto che raccogliere fin da principio una quantità di dati sperimentali, la cui importanza reale mal si saprebbe riconoscere *a priori*.

Riprende in seguito l'esposizione della teoria, e descrive da ultimo alcuni istrumenti e alcuni metodi di misura per le cariche, i potenziali e le capacità.

***

Lo stesso quadro ritroviamo nella seconda parte (elettrocinetica); perchè, dopo di aver riferito le esperienze classiche del Riess, il nostro A. completa il modello meccanico abbozzato innanzi e ne ricava la nozione della corrente e la forma della legge di Ohm.

Da questa è dedotto in seguito il concetto della resistenza, e, con una semplice generalizzazione, sono ottenuti i principii di Kirchhoff. I quali vengono applicati subito dal Classen al ponte di Wheatstone e al ponte doppio di Thomson. Segue la nozione dell'energia necessaria per il mantenimento della corrente, e la dimostrazione della legge di Joule; e sono definite da ultimo le unità pratiche Ampère, Volt, Ohm, Watt.

Come nella prima parte, l'A. riporta adesso alcuni resultati sperimentali, che servono nel caso presente ad illustrare le leggi di Ohm e di Joule. E chiude con due capitoli riassuntivi sui fenomeni elettrochimici e termoelettrici.

***

Nella teoria del magnetismo il Classen non fa più uso di modelli, forse pensando che il lettore a questo punto deve essere già famigliare coi concetti più usuali. Ma, dopo di aver esposto le esperienze di Coulomb e i caratteri che distinguono il magnetismo dall'elettricità, si dedica senz'altro agli sviluppi teorici. Svolge così i calcoli più importanti sul potenziale magnetico e le distribuzioni indotte, considerando in modo particolare alcuni casi speciali (lamina, ellissoide, sfera cava ecc.).

Introduce quindi le unità del sistema assoluto, e, secondo il piano generale dell'opera, confronta la teoria con l'esperienza, e stabilisce i metodi più comuni di misura.

Digitized by Google

***

La quarta parte finalmente, che è forse la più bella e la più elegante di tutto il libro, tratta dei fenomeni elettromagnetici.

Dopo di aver ricavato dall'osservazione diretta la legge di Biot e Savart per le azioni delle correnti rettilinee e la legge di Faraday su le forze elettromotrici indotte, il Classen ne deduce le due terne di equazioni caratteristiche del campo, sotto la forma ben nota di Hertz. A questo punto l'A. non ha resistito alla tentazione di riprodurre la memoria ben nota « *Ueber die Grundgleichungen der Elektrodynamik für ruhende Körper* »; rifacendo in parte il cammino percorso egli ricava dunque dalle equazioni fondamentali le leggi già stabilite per i fenomeni statici e stazionarii. Seguendo sempre il Hertz stabilisce in seguito la formola di Laplace e le espressioni del coefficiente di induzione mutua e dell'energia relativa ad una coppia di correnti.

Passa quindi a considerare il sistema elettromagnetico di unità, e si occupa in particolare del rapporto che corre fra le due unità di quantità.

Dopo alcuni brevi calcoli relativi ai solenoidi viene finalmente il nostro A. a studiare il problema delle oscillazioni elettriche, riferendosi all'altra bella memoria di Hertz « *Ueber die Kräfte elektrischer Schwingungen* »; e confronta da ultimo i resultati teorici con quelli forniti dall'esperienza.

Chiudono il libro due capitoli, dei quali il primo tratta le correnti alternative e l'altro le misure elettromagnetiche più importanti.

***

Questi cenni sommarii bastano senza dubbio per far vedere quanta ricchezza di materiale abbia saputo condensare il Classen nei due volumetti, che costituiscono la sua opera. Certo non gli si può fare una colpa di avere trascurato l'applicazione delle equazioni di Lagrange alla elettrodinamica, come di teoria che trascende i limiti di un primo studio; piuttosto sarebbe stato desiderabile che egli trattasse, se pure brevemente, delle quistioni relative ai corpi in moto, le quali sollevano ora il massimo interesse. Ad ogni modo, così come è il libro del Classen, prende un posto onorevole fra i migliori e i più utili apparsi in questi ultimi anni.

A. GARBASSO.

Digitized by Google

A. E. GIBSON. — *An elementary Treatise on Graphs.* London, Maccuillon 1904, 8° picc., p. X + 183.

Il nome di « graphs » venne dato dal Sylvester e dal Clifford (v. *Mathematical Papers*, p. 286, 1882) e quindi del Peterson (*Acta mathematica*, T. XV, 1881) a certe figure utili nell'interpretazione delle forme algebriche. Ma non è questo il significato attribuito a quella parola nell'opera presente, giacchè quel voccabolo è ivi inteso come significante *curva rappresentatrice di una funzione di una variabile.* Tale opera è, infatti, destinata a diffondere e popolarizzare l'applicazione della geometria allo studio delle funzioni; e (lo dichiariamo senza titubanza) il suo intento è pienamente conseguito. I molti esempi svolti in tutti i loro particolari e quelli non meno numerosi proposti attestano la grande abilità didattica dell'A.; al quale non possiamo che augurare il suo manuale trovi accesso presso tutte le persone che aspirano a farsi un'idea chiara della possibilità di disegnare invece di calcolare, e di seguire coll'occhio l'andamento di qualche fatto matematico, fisico o sociale.

G. L.

J. C. POGGENDORFF'S *Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exacten Wissenschaften. Band* IV *(die Jahre 1883 bis zur Gegenwart umfassend), herausgegeben von Prof.* D.r A. VON OETTINGEN. Leipzig, Y. A. Barth, 1904, 8° gr., p. XII + 1718.

Il *Bollettino* invia al Prof. A. von Oettingen i propri rallegramenti ed il proprio plauso sincero per avere portato a compimento, in un termine relativamente breve, la grande ed utile impresa alla quale si è sobbarcato. Rimandando i nostri fedeli lettori a quanto scrivemmo già a tale proposito (v. *Bollettino*, T. II, 1899, p. 22; T. V, 1902, p. 127), ci limitiamo a osservare che mentre i due primi volumi dell'opera in questione comprendono 1425 articoli relativi a matematici ed il III 1047, l'attuale ne abbraccia 1347; ai 1425 matematici, di cui i primi due volumi danno notizie, il III ne aggiunse 823 ed il IV ne aggiunge 844, onde in totale sono 3092 i matematici di cui l'opera del Poggendorff-Oettingen porge dati bibliografici sicuri: tali dati statistici sono così eloquenti che nulla crediamo sia il caso di aggiungervi. Osserviamo soltanto che il Prof. Oettingen, lasciando ad altri il compito di proseguire in avvenire l'opera attorno a cui spese tante fatiche, credette dovere suo di depositare presso la Casa editrice un considerevole lavoro preparatorio da lui già compiuto.

G. L.

Digitized by Google

Scherz und Ernst in der Mathematik. Geflügelte und ungeflügelte Worte, gesammelt und herausgegeben von W. AHRENS. Leipzig, Teubner, 1904, 8°, p. X + 522. [Prezzo del vol. legato Mk. 8].

L'idea di raccogliere frasi ed opinioni concernenti le scienze esatte non è del tutto nuova; il Rebiére ed il Maupin già l'ebbero e la tradussero in atto, e forse non furono nemmeno i primi. Ma è caratteristica del modo di procedere dell'Ahrens quello di citare esattissimamente le fonti a cui attrasse, sicchè la sua opera risponde in ogni caso alla domanda *dove è stato scritto?* che spesso restava senza risposta pei lettori delle opere surriferite.

Altra e non meno lodevole caratteristica è quella di cercare più d'istruire che di dilettare, onde l'*Ernst* ha un marcato sopravvento sullo *Scherz;* avendo così operato, l'Ahrens contribuisce col suo lavoro a diffondere e popolarizzare certi pensieri profondi di grandi scienziati, semi preziosi che cadendo su terreno fertile possono condurre a risultati utili alla scienza.

I temi toccati dalle frasi riportate sono estremamente vari, ed a ragione il raccoglitore non ne ha nemmeno tentata una classificazione; tuttavia il lettore attento non tarderà ad avvertire un certo ordine di successione non disforme dai precetti della logica; inoltre il particolareggiato indice per materie che chiude il volume rende agevole tanto di formarsi un concetto complessivo dei campi discorsi, quanto di trovare in ogni occasione quello che può interessare.

Le opere a cui attinse il dotto compilatore sono numerosissime; primeggiano gli autori tedeschi (fra tutti Gauss), scarseggiano assai gl'italiani (ad es. nulla si trova di Galileo); ogni lettore, nel mentre vi apprenderà molto di nuovo, lamenterà certamente di non trovarvi idee e motti a cui erasi affezionato e che avrebbe desiderato veder portati nel dominio di tutti; ma ciò era prevedibile ed inevitabile; di tale presunte critiche il Sig. Ahrens si consolerà facilmente pensando che, nell'impossibilità di dire *tutto*, egli insegnò *molte* e *belle* cose.

G. L.

E. CESÀRO. — *Lehrbuch der algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechnung mit zahlreichen Uebungsbeispielen nach einem Manuskripte des Verfassers deutsch herausgegeben von* G. Kowalewski. Leipzig, Teubner, 1904, 8°, p. IV+894. [Prezzo Mk. 15].

E. CESÀRO. — *Elementi di calcolo infinitesimale con numerose applicazioni geometriche.* 2ª edizione notevolmente ampliata. Napoli, Alvano, 1905, 8°, p. XIII+526 [Prezzo L. 20].

La comparsa di un'opera del prof. Cesàro è sempre una festa pel pubblico matematico, e noi non comprendiamo come egli, di fronte

Digitized by Google

alle manifestazioni unanimi di grande stima della stampa scientifica, dia peso a certe critiche che sarebbero state sollevate, non sappiamo dove nè da chi, contro l'indirizzo troppo teorico delle sue opere. C'è bensì all'estero una scuola che vorrebbe ridotta al minimo la teoria per gli studenti destinati all'ingegneria pratica, e sagrificato il rigore alla semplicità. Ma fortunatamente queste idee, che noi non abbiamo tralasciato di confutare in ogni occasione (*Boll.* 1898, p. 98; 1902, p. 25, 122; 1903, p. 14), non si sono fatte strada in Italia, e ne è prova il grande, e in qualche caso forse eccessivo, sviluppo che hanno in tutte le Università nostre i corsi teorici, benchè destinati ad un pubblico composto nella massima parte di futuri ingegneri. Prosegua dunque il prof. Cesàro la sua via, e, ricordando il vecchio suggerimento dantesco, guardi e passi, o meglio, passi senza guardare, chè non ne vale la pena!

Due sono le opere del Cesàro che presentiamo ai nostri lettori, l'una tedesca, l'altra italiana.

Questa seconda è una nuova edizione degli *Elementi di calcolo infinitesimale*, di cui abbiamo a suo tempo diffusamente parlato (*Bollettino* 1899, p. 98); quindi poco ci resta a dirne, tanto più che lo sviluppo e la distribuzione delle varie parti non hanno subito variazione notevole. Pochi infatti, e di secondaria importanza, sono i nuovi argomenti trattati. Fra questi notiamo un capitolo sui numeri di Bernoulli e d'Eulero, tolto in gran parte dall'*Analisi algebrica*, e qualche cenno sulle coordinate curvilinee, sui baricentri, sulla funzione di Weierstrass e sul calcolo delle differenze finite. Il maggiore aumento ha avuto luogo negli esercizi e nelle applicazioni analitiche e geometriche. A dir vero, l'accresciuta mole del libro ci aveva fatto sperare che qualche argomento, trattato nella prima edizione troppo di sfuggita, avesse trovato nella nuova edizione un più ampio sviluppo; ma non per questo possiamo accettare la definizione troppo modesta data dall'autore del suo libro: « una raccolta di esercitazioni » Il libro è un ottimo, benchè alquanto conciso, trattato teorico, in cui nulla di essenziale manca, corredato da una raccolta di esercitazioni quale solo il prof. Cesaro sa mettere insieme.

L'opera tedesca, ottimamente tradotta dal prof. G. Kowalewski sopra un manoscritto dell'autore, comprende *l'Analisi algebrica* e il *Calcolo infinitesimale* dell'autore stesso, e stimiamo perciò inutile trattenerci particolarmente sulla medesima.

G. Vivanti.

Digitized by Google

J. J. SYLVESTER. — *The collected mathematical Papers.* Vol. I (1837-1853). Cambridge, University Press, 1904, 8° gr., p. XII + 650. [Prezzo scellini 18].

I lavori del Sylvester inseriti, almeno in parte, in raccolte di difficile consultazione, ripieni di simboli inusitati (1), sovracarichi di neologismi (2) non tutti indispensabili, e recanti spesso le stigmate dell'improvvisazione, non conseguirono la notorietà, nè esercitarono la fecondatrice influenza che ragionevolmente se ne poteva attendere. Il raccoglierli e ripubblicarli è degno, non solo un dovuto omaggio a chi in Inghilterra nel Sec. XIX divise col Cayley lo scettro delle matematiche, ma una deliberazione da cui è presumibile deriveranno rifioriture dei concetti e dei metodi a cui egli ha potentemente contribuito. Ben è vero che alcune delle idee del Sylvester raggiunsero già una notevole popolarità (basti infatti ricordare il *metodo dialitico* e la *legge d'inerzia delle forme quadratiche);* ma molte sue indagini sulla teoria delle forme e sui determinanti aspettano ancora di essere incorporate nei trattati sull'argomento per essere diffusi anche fra i principianti; e se le sue ricerche sulle coppie di coniche o di quadriche sono oggi nel dominio di tutti, gli è che altri le compì per proprio conto con metodi differenti. Tutto ciò prova che la pubblicazione di cui oggi annunciamo l'inizio, mentre dovrà essere consultata dallo storico che intende di attribuire a tutti il suo, prepara delle gradite sorprese anche a chi vi cercherà cose da lui ignorate (3). G. L.

G. LEJEUNE-DIRICHLET. — *Vorlesungen über die Lehre von den einfachen und mehrfachen bestimmten Integralen herausgegeben von* G. Arendt. Braunschweig, Vieweg und Sohn, 1904, 8°, p. XXIII + 476. [Prezzo Mk. 12].

Ben venga questo libro a sollevare il nostro spirito dalla opprimente pesantezza di certe letture moderne! Esso riproduce un corso tenuto a

(1) Ricordiamo a tale proposito che (lo assicura il Lampe) Weirstrass tenne dietro ai lavori di Sylvester fino al giorno in cui vide in essi anche le lettere ebraiche; ma poi cessò, trovando che la cosa diventava troppo complicata!

(2) « Forse: posso pretendere senza immodestia il nome di Adamo matematico, perchè credo di avere imposto da solo più nomi (generalmente accettati poi) a creature del mondo matematico di quanto abbiano fatto inscrivere tutti i matematici dell'epoca attuale » Così scrisse il Sylvester in Nature, T. XXXVII, p. 152.

(3) Come esempio citeremo una breve nota, inserita nel 1852 nel *Philosophical Magazine*, relativa al teorema che afferma essere isoscele ogni triangolo avente eguali le bisettrici di due angoli interni: è notorio che lo Steiner stesso non sdegnò di occuparsene (G. di Crelle T. XXVIII, 1844); ma il nostro autore, considerandolo dal punto di vista algebrica, assurse all'importante questione logica avente per iscopo la *ricerca di un criterio generale per distinguere quelle questioni geometriche nelle quali il metodo di riduzione all' assurdo è da accettarsi perchè inevitabile.*

Digitized by Google

Berlino nel 1854, eppure, dopo 50 anni, ha tutta la freschezza, tutto il sapore di una cosa viva; e ben si comprende, dopo averlo letto, come il devoto ed entusiasta discepolo che lo raccolse dalla bocca del maestro si è fatto uno scrupolo di conservare perfino i vocaboli da esso usati. Noi vorremmo vedere questo libro, insieme ai classici corsi di Riemann, nella biblioteca, anzi sul tavolino, di tutti gli insegnanti di matematica, affinchè da essi potessero apprendere come devano esporsi i giovani le parti più delicate della nostra scienza.

L'opera che abbiamo dinanzi consta più propriamente di due corsi distinti, dei quali il primo, di gran lunga il più importante per valore e per estensione, comprende la teoria degli integrali definiti, il secondo le applicazioni.

Il corso teorico si divide in due parti, dedicate, la prima agli integrali semplici, la seconda agli integrali multipli.

Dopo avere stabilito i concetti di funzione continua e di integrale definito, l'autore espone le proprietà fondamentali degli integrali e la teoria della derivazione di un integrale rispetto ad un parametro (C. 1). Tratta poi degli integrali impropri, e in particolare di certe formole che chiama *formole d' Eulero* (C. 2), e si trattiene lungamente sugli integrali euleriani (C. 3). Dalle formole relative a questi integrali altre importanti se ne possono dedurre mercè un particolare artifizio, consistente nel sostituire a certe costanti reali costanti complesse. L'autore non si nasconde le difficoltà che presenta, dal punto di vista teorico, questo processo, e cerca di stabilire sotto quali condizioni esso sia lecito, il che lo conduce ad uno studio particolareggiato della polidromia delle potenze ad esponente frazionario (C. 4). Altri due metodi per calcolare certi integrali definiti sono l'inversione dell'ordine delle integrazioni e il cambiamento della variabile; questi metodi vengono applicati a varî tipi di integrali (C. 5).

Col C. 6 incomincia la seconda parte. In questo capitolo si definisce l'integrale doppio, e si applica la teoria al calcolo delle aree, in particolare di quella dell'ellissoide, ed allo studio della curvatura delle superficie. Il C. 7 è dedicato agli integrali tripli, e specialmente al problema dell'attrazione degli ellissoidi, che viene largamente sviluppato in tutti i suoi particolari. Questo problema viene ripreso nel C. 8 col metodo del *fattore discontinuo*, del quale si mostra poi l'uso in altre ricerche, come nel calcolo di certi volumi e di certi momenti d'inerzia.

Le applicazioni riguardano lo studio di certi integrali definiti connessi colla teoria della serie armonica, il calcolo degli integrali euleriani mediante fattoriali, la teoria dei valori asintotici delle funzioni, le serie ipergeometrica, infine le proprietà fondamentali delle funzioni d'una variabile complessa.

Digitized by Google

Pretendere che questo libro, esaminato alla luce della critica odierna, appaia del tutto scevro di mende, sarebbe troppo. Potrebbe osservarsi p. es. che non è esatto il metodo seguito a p. 151 per riconoscere la continuità d'una funzione di due variabili, che non sempre è lecita l'inversione dell'ordine delle integrazioni, come come si ammette a p. 167 e altrove, e così via; e forse sarebbe stato opportuno aggiungere qualche nota che mettesse in guardia il lettore nei punti dove l'assoluto rigore fa difetto. Noi però crediamo si deva concedere al compilatore di queste lezioni, anzichè l'indulgenza che egli invoca, un sincero tributo d'ammirazione per l'affetto sempre così vivo verso il grande maestro che traspira da ogni sua parola, e di riconoscenza per averci conservata con religione filiale un'opera tanto preziosa.

G. Vivanti.

Dr. E. Bardey. — *Methodisch geordnete Sammlung von Aufgaben aus der Elementar-Arithmetik. Neue Ausgabe vorzugsweise zum Gebrauche in den mittleren und oberen Klassen der Lehrerseminare bearbeitet von* W. Seyffahrt. Leipzig und Berlin, 1904, 8°, p. VIII+300 [Prezzo del vol. leg. Mk. 2.80].

La Germania, patria della specializzazione, ha prodotto anche uno specialista nell'arte di compilare raccolte di esercizî di aritmetica ed algebra; è il Bardey, che già presentammo ai nostri lettori (v. *Bollettino*, T. V, 1902, p. 124; T. VI, 1903, p. 56 e 57) e di cui oggi segnaliamo un altro ottimo volume, contenente all'incirca 4500 enunciati di problemi relativi all'aritmetica ed all'algebra elementare. I temi a cui si riferiscono risultano dall'indice seguente: I. Addizione. II. Sottrazione. III. Lo zero ed i numeri negativi. IV. Moltiplicazione. V. Divisione. VI. Frazioni. VII. Frazioni decimali. VIII. Divisibilità dei numeri. IX Rapporti e proporzioni. X. Elevazione a potenza. XI. Estrazione di radice. XII. Logaritmi. XIII. Equazioni di 1.° grado. XIV. Equazioni di 2.° grado. XV. Problemi indeterminati. XVI. Progressioni. XVII. Calcoli d'interessi.

G. L.

O. Fort *und* O. Schlömilch. — *Lehrbuch der analytischen Geometrie.* 1. Teil. *Analytische Geometrie der Ebene von* O. Fort. 7. Auflage, besorgt von R. Heger. Leipzig und Berlin, Teubner 1904, 8°, p. XVII+268.

Il favore ininterrotto del pubblico per questa opera è dimostrato dalle date che portano le prefazioni alle successive edizioni che ebbe; II: Pasqua 1863; III: Settembre 1871; IV: Aprile 1873; V: Aprile

Digitized by Google

1893; VI: Luglio 1893; VII: Agosto 1903. Essa consta (oltre che di una breve introduzione storica) di 10 capitoli aventi per titoli risp.: I. Il punto. II. La retta. III. Il cerchio. VI. Le coniche. V. La parabola. VI. L' ellisse. VII. L' iperbola. VIII. Le linee di second' ordine in generale. IX. Le linee di ordine superiore. X. Le linee trascendenti. Come si vede l' A., pur concedendo un ampio spazio alle coniche, ha saggiamente pensato che anche delle altre linee almeno un cenno dovesse farsi. L' esposizione è generalmente chiara e rigorosa; fa solo eccezione il passo (p. 12-13) concernente le coordinate polari, al quale converrebbe arrecare qualche ritocco inteso a precisare i segni da attribuirsi ad esse.

G. L.

J.-A. DE SÉGUIER. — *Théorie des groupes finis. Éléments de la théorie des groupes abstraits.* Paris, Gauthier-Villars, 1904, 8°, p. II+176.

Abbiasi un insieme di elementi qualunque G_1, e sia G_1^n l'insieme delle loro disposizioni ad n ad n con ripetizione, F l' insieme costituito dagli elementi degli aggregati G_1^n corrispondenti a tutti i valori finiti di n. Ad ogni elemento di F si faccia corrispondere un elemento di G_1, in modo che ad ogni elemento di F costituito da un solo elemento di G_1 corrisponda in G_1 questo elemento stesso. Aggiungiamo col pensiero a ciascun elemento di G_1 le sue relazioni coi vari elementi di F a cui esso corrisponde, e diciamo G l' insieme degli elementi così modificati. Possiamo esprimere la corrispondenza tra l' elemento x di G_1 e l'elemento $ab...k$ di F, dicendo che x è eguale al *prodotto* $ab...k$. Se la moltiplicazione così definita ha la proprietà associativa, si dice che G è un *corpo*. Esso è *abeliano* se la moltiplicazione ha anche la proprietà commutativa. Sia S una parte di G tale che ogni elemento di G sia un prodotto di elementi di S. Se, essendo α un elemento qualunque di S e β un elemento qualunque di G, esistono sempre elementi x, y di G che soddisfanno alle relazioni $\alpha x = \beta$, $y \alpha = \beta$, G si dice un *gruppo*.

La teoria generale dei gruppi, e quella di certi corpi speciali detti *corpi di Galois*, occupano il primo capitolo del volumetto che esaminiamo. Il secondo è dedicato ai sottogruppi ed alle ricerche connesse; il terzo ai gruppi abeliani; il quarto ai gruppi il cui ordine è una potenza d' un numero primo. Questo stesso argomento forma oggetto dell' ultima delle tre note con cui si chiude il volume, mentre le altre due trattano dei gruppi di movimenti, e delle proprietà delle matrici e dei sistemi lineari.

Il libro, sebbene interessante per l' importanza e la generalità dell' argomento che tratta, è di difficilissima lettura, e per la forma

Digitized by Google

estremamente astrusa ed involuta, di cui abbiamo tentato di dare un'idea riportando quasi letteralmente la definizione di gruppo, e per il gran numero di termini tecnici, dei quali spesso tre o quattro soro destinati ad esprimere un medesimo concetto.

G. VIVANTI.

JULES TANNERY. — *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable.* 2ᵉ éd.. T. I. Paris, 1904, 8°, p. 422 [Prezzo fr. 14].

Questo primo volume è diviso in sei capitoli.

Nel I Cap. l'aut. parla dei numeri irrazionali, uniformandosi a *Dedekind;* un numero irrazionale risulta così come di separazione di tutti i numeri razionali in due classi, una inferiore senza massimo ed una superiore senza minimo, e vien pure considerato come rapporto di segmenti incommensurabili. Fa poi vedere che un numero irrazionale può esser determinato da insiemi limitrofi di numeri razionali senza che i numeri razionali figurino tutti, e che ogni numero ammette una rappresentazione decimale. Tratta brevemente delle operazioni elementari con numeri definiti da insiemi e si vale spesso di rappresentazione grafica; dà carattere specifico di commensurabilità od incommensurabilità d'un arco di circolo col circolo intero. Dà le proprietà fondamentali delle frazioni continue aritmetiche e fa particolar cenno delle periodiche e degli equivalenti irrazionali quadratici.

Nel II Cap. dà gli elementi relativi agli insiemi infiniti: distingue molto convenientemente i limiti superiore ed inferiore (*borne supérieure et inférieure*) dai veri limiti dell'insieme (*points d'accumulation*). Dà le prime nozioni riguardanti le successioni infinite ed i loro limiti; dà la seguente condizione di tendenza a limite: La condizione necessaria e sufficiente affinchè una successione tenda a limite è che essa sia limitata e non ammetta che un punto d'accumulazione (1). La critica moderna sopprimerebbe il « la » iniziale di questa notevole proposizione. Dà poi le proposizioni fondamentali relative agli insiemi numerabili e ne deduce note conseguenze, p. es. che sono numerabili i numeri algebrici: dà dimostrazione della non numerabilità dei punti del continuo. Accenna al derivato d'un insieme e ne dimostra la fondamentale proprietà d'esser chiuso. Dà le nozioni di gruppo perfetto e di gruppo denso in intervallo.

Nel III Cap. pone le nozioni fondamentali riguardanti la convergenza e divergenza delle serie e dei prodotti infiniti e fa cenno del-

(1) V. F. GIUDICE: *Rend. Circ. Mat*, Palermo 1903, pag. 191. Per la forma sotto cui il TANNERY presenta la condizione di tendenza a limite, v. F. GIUDICE: *Rend. Circ. Mat.*, 1891, Corollario III a pag. 281; e *Periodico di Mat.*, 1898, pag. 7.

Digitized by Google

l'addizione e della sottrazione di serie; considera poi particolarmente la convergenza assoluta. S'occupa delle serie multiple e, come serie doppia, dà il prodotto di due serie assolutamente convergenti. Pone in rilievo l'importanza analitica delle serie assolutamente convergenti perchè s'opera con esse come con espressioni finite. Dà le nozioni fondamentali riguardanti i prodotti infiniti subordinandone il carattere di convergenza, o divergenza a quello di serie, soffermandosi anche qui sulla convergenza assoluta, pur prendendo in considerazione la convergenza semplice. Dà i criterii elementari di convergenza delle serie a termini positivi, dà la regola CAUCHY-HADAMARD relativa al raggio di convergenza della serie $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$. Per le serie a termini positivi dà anche le proposizioni d'ABEL, la regola di GAUSS, ed alcune proposizioni relative alla convergenza semplice, fermando specialmente l'attenzione sul lemma d'ABEL.

Considera le frazioni continue della forma

$$a_0 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots \qquad a_0 + \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \ldots$$

dove i numeri a_r, b_s son qualunque, dando, per esse, la legge di formazione delle ridotte, gli ordinarii sviluppi in serie e criterii di convergenza e divergenza.

Nel IV Cap. dà le nozioni di funzione, di funzione limitata, di funzione continua, di funzione continua in punto d'accumulazione od in insieme e dimostra qualche proprietà fondamentale. Dice brevemente della rappresentazione grafica delle funzioni. Dà lo sviluppo di TAYLOR per i polinomii. Tratta delle frazioni razionali e le considera in intorni di punti; accenna alla scomposizione in frazioni semplici. Dà l'espressione di LAGRANGE di polinomio che prende valori assegnati per dati valori della variabile. Dà le principali proprietà della funzione a^x e prova che è caratterizzata dalla proprietà $\varphi(x).\varphi(y) = \varphi(x+y)$. Osserva che le proprietà $\varphi(xy) = \varphi(x) + \varphi(y)$ e $\varphi(x)\,\varphi(y) = \varphi(xy)$ sonn caratteristiche per le funzioni $\log x$ ed x^m.

Nel V Cap. dà la condizione di convergenza di funzione a limite: considera la semplice convergenza, la convergenza uniforme in senso largo o convergenza in ugual grado semplice come fu detta dal Dini, che fu il primo a considerarla (1), e la convergenza uniforme. Dà teoremi fondamentali alla convergenza di funzioni ed ai loro limiti, considerando anche funzioni date come somme di serie di funzioni; ne deduce proprietà delle serie ordinate secondo le potenze intere positive della variabile. Fa cenno delle serie aventi per termini funzioni di due

(1) V. DINI, *Fondamenti*. Pisa 1878, pag. 103.

Digitized by Google

variabili date in ogni punto d'un rettangolo, contorno incluso. Dice brevemente dei prodotti infiniti pei quali, osserva, si possono fare considerazioni analoghe a quelle fatte per le serie. Dà, mediante le relative serie, le proprietà fondamentali delle funzioni elementari

$$e^x \quad , \quad (1+x)^m \quad , \quad a^x \quad , \quad \log(1+x)$$

e, mediante le loro espressioni con e^x e conseguenti serie, quelle delle funzioni iperboliche

$$\operatorname{ch} x \quad , \quad \operatorname{sh} x \quad , \quad \operatorname{th} x$$

e delle loro inverse, che indica con

$$a\operatorname{ch} x \quad , \quad a\operatorname{sh} x \quad , \quad a\operatorname{th} x,$$

e delle funzioni circolari $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$, che considera anche come particolari $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ soddisfacienti le condizioni

$$\varphi(a+b) = \varphi(a)\varphi(b) - \psi(a)\psi(b) \quad \psi(a+b) = \psi(a)\varphi(b) - \psi(b)\varphi(a).$$

Dà gli sviluppi di $\cos \pi x$ e di $\operatorname{sen} \pi x$ in prodotti infiniti, gli sviluppi in serie di $\frac{1}{2x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$, di $\pi \cot \pi x$, di $\pi \operatorname{tg} \pi x$ e di $\frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi x}$. Dimostra infine l'identità

$$\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-q^{n^2}) \prod_{n=1}^{n=\infty}(1+q^{2n-1}x) \prod_{n=1}^{n=\infty}(1+q^{2n-1}x^{-1}) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} q^{n^2}x^n \quad (q^2<1 \, , \, x=o).$$

Nel VI Cap. definisce la derivata, dà le derivate successive e la formola di MACLAURIN per funzione intera d'una variabile e ne deduce le derivate di e^x, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$. Dà, in particolare, le derivate di $\log x$ e di x^m. Dà le derivate di prodotto, di potenza e di quoziente, e, senza dimostrazione la formola di LEIBNIZ per la derivata d'ordine qualunque d'un prodotto ed altra formula, che è importante p. es. per l'integrazione per parti. Dà le derivate di $\operatorname{tg} x$, di $\operatorname{th} x$ e delle loro inverse; la formula di derivazione di funzione di funzione e ne deduce le derivate di $a^{u(x)}$, di $\log u(x)$, di $u(x)^m$. Dà le regole di derivazione per le funzioni inverse e ne deduce le derivate di $\log x$, di $\operatorname{arc\,sen} x$, di $\operatorname{arc\,cos} x$ e di $\operatorname{arc\,tg} x$. Studia la derivata di $\operatorname{arc\,tg} \frac{P}{Q}$ dove P e Q son polinomii in x e dà quella di $\operatorname{arc\,tg}(\alpha \operatorname{tg} x)$ dove α è numero positivo.

Dimostra il teorema di ROLLE sull'esistenza di radice della derivata

Digitized by Google

tra due radici della primitiva, quello di LAGRANGE sul rapporto $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ e quello di CAUCHY sul rapporto $\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}$: ne deduce la convergenza uniforme del rapporto incrementale alla derivata. Si occupa della continuità d'una funzione di due variabili e dimostra, condizionatamente, che $f''_{xy} = f''_{yx}$. Dà la formula di derivazione di funzione composta di due componenti e ne deduce la derivata di $u(x)^{v(x)}$. Dà la derivata di funzione implicita.

Studia le funzioni mediante le derivate, specialmente in quanto riguarda l'esser la funzione crescente o decrescente, massima o minima. Dà formule relative alle successive differenze di funzione d'una variabile e ne deduce che

$$\frac{d^n f}{d x^n} = \lim \frac{\Delta^n f(x)}{(\Delta x)^n}.$$

Dopo la generalizzazione del teorema di ROLLE, da lo sviluppo di $f(x)$ secondo le potenze ascendenti di $x - x_1$ deducendolo da relazione più generale; ne trae lo sviluppo di TAYLOR. Dopo la formula di MACLAURIN, fa considerazioni sullo studio di funzione in vicinanza di particolar valore della variabile. Si occupa delle espressioni indeterminate; dà, per esse, le regole di l'HOSPITAL e le fa seguire da un'osservazione di APPELL. Espone infine l'esempio di WEIERSTRASS di funzione continua senza derivata.

Genova, 1.° Gennaio 1905.

F. GIUDICE.

L. KONIGSBERGER. — *Carl Gustav Jacob Jacobi. Festschrift zur Feier der hundertsten Wiederkehr seines Geburtstages. Mit einem Bildnis und dem Faksimile eines Briefes.* Leipzig, Teubner, 1904, 8° gr., p. XVIII + 554. [Prezzo del vol. leg. Mk. 16].

Gli avvenimenti più importanti della vita di Jacobi (n. a Postdam il 10 Dic. 1809, m. a Berlino il 18 Feb. 1851), nonchè le caratteristiche più spiccate della sua produzione scientifica, sono generalmente noti grazie ad un celebre elogio scritto da Lejeune-Dirichlet e saggiamente posto come esordio all'edizione completa delle opere del celebre matematico. Ma i limiti angusti posti dalla discrezione ad un discorso vietarono al Dirichlet di tracciare una completa biografia del sommo emulo di Abel e di addentrarsi in un'analisi completa e minuta di tutte la sua importante produzione scientifica. Ora l'una cosa e l'altra si propose il Konigsberger, per commemorare il primo centenario della nascita di Jacobi, e lo fece col poderoso lavoro che ora annunciamo

Digitized by Google

(del quale un sunto venne letto il 9 Agosto u. s., nella seduta inaugurale del III Congresso internazionale dei matematici). Avendo avuto a propria disposizione molte lettere scritte da Jacobi ed a lui dirette, nonchè i manoscritti che si conservano presso l'Accademia di Berlino, il Konigsberger potè lumeggiare pienamente certi episodi che lo concernono e completare l'idea che dalla sua opera scientifica si desume dallo studio dei suoi lavori a stampa. Uno speciale interesse ci sembrano particolarmente destinati a destare nei matematici le notizie da lui fornite sui vari corsi di lezioni tenuti da Jacobi, per molti dei quali il Königsberger riportò integralmente gl'importanti esordi storico-critici; altri lettori leggeranno invece con avidità le ampie notizie date dall'A. sopra le ricerche di Jacobi sulla storia della matematica greca; ed altri ancora apprenderanno con sorpresa la scorreria fatta di Jacobi nella politica durante le memorabili giornate del 1848 e gli effetti deplorevoli che essa ebbe sul resto della sua esistenza.

Se si riflette che questo volume del Königsberger segue alla distanza di non più di un anno i tre che egli dedicò a Helmholtz (v. questo *Bollettino* T. VI, 1903, p. 68 e T. VII, 1904, p. 77), non si potrà che ammirare la grande resistenza al lavoro dell'autore; e se si riflette che il volume stesso apparve nel giorno da tempo prefissato, si sarà indotti a passare sotto silenzio alcuni appunti — intorno alla elaborazione forse non completa del materiale raccolto, all'assenza di esatte citazioni e all'ordinamento della materia (1) — che altrimenti si sarebbe tentato di fare. Ciò non ostante tutti dovranno riconoscere che, anche nello stato attuale, l'opera dell'infaticabile professore di Heidelberg è un degno monumento elevato dalla grande patria tedesca ad uno de' suoi figli più meritatamente famosi.

G. L.

G. Holzmüller. — *Vorbereitende Einführung in die Raumlehre.* Mit 76 Figuren im Text. Leipzig und Berlin, G. B. Teubner, 1904, 8°, p. X + 123 [Prezzo del vol. leg. Mk. 1,60].

Questa nuova pubblicazione dell'eminente professore tedesco, che tanto si adopera a migliorare i metodi d'insegnamento della matematica, riuscirà particolarmente utile a coloro che, per debito di ufficio, sono chiamati a spiegare gli elementi della stereometria, a ren-

(1) P. es.: se i lunghi squarci riferiti fossero stati raccolti in appendice non avrebbero interrotto il filo del discorso, come assai spesso fanno, ed avrebbero costituito un'interessante crestomazia jacobiana.

Digitized by Google

dere famigliare la gioventù con le figure geometriche a tre dimensioni. Fra l'altro verrà ad essi agevolata la costruzione di modelli, preziosi ausiliari nell' insegnamento della geometria solida.

G. L.

NOTIZIE

MEDAGLIA GUCCIA. — In occasione del IV Congresso matematico, che sarà tenuto a Roma nella Primavera del 1908, il Circolo matematico di Palermo assegnerà un premio (detto *Medaglia Guccia* dal nome del suo fondatore) di L. 3000 accompagnate da una piccola medaglia d' oro, all' autore di *una memoria che farà compiere un essenziale progresso alla teoria delle curve gobbe algebriche.* Nel caso in cui nessuna delle memorie presentate fosse ritenuta meritevole del premio questo potrà essere invece conferito a *chi farà compiere un essenziale progresso alla teoria della superficie o di altre varietà algebriche.* Scadenza 1.° Luglio 1907. Il giudizio sul merito dei concorrenti verrà pronunciato da una commissione composta di M. Noether, H. Poincaré e C. Segre.

* * *

I PREMI DELL' ISTITUTO DI FRANCIA. — Nella seduta del 19 Dicembre 1904 vennero, fra gli altri, conferiti i premi seguenti: *Premio Bordin,* in parte, al Servant; *Premio Vaillant* (« determinazione e studio di tutti gli spostamenti di una figura invariabile i cui vari punti descrivono curve sferiche ») diviso fra Borel e Bricard; *Premio Francoeur* a E. Lemoine; *Premio Poncelet* a D. André; *Premio Montyon* a G. Richard; *Premio Lallade* a S. W. Burnham.

Negli anni venturi l'Accademia stessa conferirà i seguenti premi:

Premio Francoeur 1905: Scoperta utile ai progressi delle matematiche pure ed applicate.

Premio Poncelet 1905: Opera di matematica applicata.

Gran premio delle Scienze matematiche 1906: « Perfezionare in qualche punto importante lo studio della convergenza delle frazioni continue algebriche ».

Premio Bordin 1907: « Riconoscere in modo generale se le coordinate dei punti d' una superficie algebrica possono esprimersi mediante funzioni abeliane di due parametri, in modo che ad ogni punto della superficie corrisponda più d' un sistema di valori dei parametri. In

Digitized by Google

particolare studiare il caso in cui l'equazione della superficie ha la forma $z^2 = f(x, y)$, f essendo un polinomio, e dare esempi espliciti di siffatte superficie ».

Premio Vaillant, 1907. « Perfezionare in un punto importante il problema analitico concernente le piastre elastiche incastrate, cioè il problema dell'integrazione della equazione

$$\frac{d^4 u}{d x^4} + 2 \frac{d^4 u}{d^2 x \cdot d^2 y} + \frac{d^4 u}{d y^4} = f(x, y),$$

con la condizione che la funzione u e la sua derivata secondo la normale al contorno della piastra siano nulle. Esaminare specialmente il caso di un contorno rettangolare ».

***

INDICE GENERALE DEGLI ANNALI DI MATEMATICA. — Per cura del Prof. Dini videro di recente la luce, in un fascicolo *ad hoc*, gli indici delle tre serie, pubblicate sino alla morte del Brioschi, della celebre raccolta fondata dal Torosolini; la distribuzione, tanto per autori che per materie, rende tale fascicolo una preziosa opera di consultazione, chiamata a rendere agli studiosi eminenti servigi.

***

MONUMENTO A VEGA. — Giorgio Vega nacque nel 1754 (o nel 1756) a Sagoritza (Alta Carinzia) da poveri genitori; entrato nell'arma di artiglieria, per meriti di guerra raggiunse il grado di tenente colonnello e conseguì il grado di barone. Nel campo matematico egli, che insegnò le scienze esatte a Vienna nel corpo dei bombardieri, è noto pel suo manuale logaritmico il quale raggiunse testè l'80.ª ed., fu tradotto in inglese, francese, olandese e russo, e fece nominare il suo autore membro delle Accademie o Società di Londra, Berlino, Gottinga, Parigi, Erfurt e Magonza. Una mano assassina lo spense nel 1802. I suoi compatrioti, sotto l'alto patronato del governo austriaco, stanno raccogliendo i fondi per erigergli un monumento a Lubiana, capoluogo della Carinzia.

***

LA MATEMATICA DEI GIAPPONESI. — La guerra che si combatte nell'estremo Oriente rese lo studio dell'anima giapponese un argomento di moda, ed anche la matematica di quel popolo interessante è oggetto di continue ricerche. Già segnalammo quelle del Fujisawa (*Bollettino*, T. VI, 1903, p. 22) e del Ventura Reyes y Prosper (T. VII,

Digitized by Google

1904, p. 127); ora facciamo altrettanto per quelle recenti di P. Hazer (*Die exakten Wissenschaften im alten Japan*, Kiel 1905), i cui risultati vennero esposti in un discorso d'occasione, tenuto nell' Università di Kiel il 27 Gennaio 1905. Esse sono le più ampie e profonde a noi note sull' argomento ed è da augurarsi vengano proseguite, sì da portare piena luce sopra varî punti che sarebbe urgente chiarire, il più importante dei quali è l'esatta determinazione del grado dell' influenza intellettuale che i Giapponesi subirono dagli Europei.

* * *

TEMA PROPOSTO DALLA R. ACCADEMIA DANESE. — Un' aritmetica nella quale l'addizione non fosse commutativa sarebbe analoga alla geometria non euclidea. Riconosciuta la possibilità di siffatta aritmetica, accanto a le altre proprietà dell' addizione e della sottrazione, l' univocità e l' associatività della moltiplicazione, la distributività rispetto al moltiplicatore e inoltre il principio della reciprocità univoca (in forza di cui non esistono prodotti nulli di fattori tutti differenti da zero), si potrà servirsi dei numeri di una tale aritmetica come determinazioni (relative) delle posizioni in una geometria non euclidea.

T. N. Thiele, nella sua memoria sulle definizioni del numero (v. le *Memorie dell'Acc. delle Scienze e Lettere di Danimarca*, 6.ª Serie, Sez. delle Scienze, II, 11, 1886, p. 508) ha indicata la regola da seguirsi nell' addizionare certe determinazioni numeroidi a tre dimensioni (dette *numerali*); di più vi dimostra che tale regola va d'accordo con i principii dell' addizione e della sottrazione. Ora si può provare che per le *numerali* in questione sussistono eziandio alcuni dei principali teoremi della moltiplicazione e della divisione; resta a sapersi se, in generale, valgono per esse tutti questi teoremi.

Ciò posto l'Accademia mette a concorso la seguente questione:

« Indicare una regola di moltiplicazione applicabile alle *numerali* summenzionate e mediante la quale si ottengano prodotti (e somme) che si presentino sotto la stessa forma tridimensionale caratteristica pei fattori: esaminare poi se in conseguenza sussistano i principali teoremi sulla moltiplicazione e divisione. Sarebbe inoltre desiderabile si cercasse se le dette *numerali* siano suscettibili d' interpretazione geometrica ».

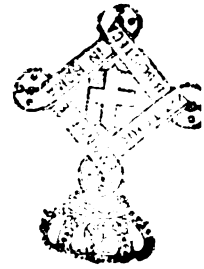
Premio: medaglia d'oro del valore di 320 corone. Scadenza: 31 Ottobre 1906.

Bestonzo Pietro, Gerente.

Genova - Tipografia R. Istituto Sordomuti - 1905.

Digitized by Google

ANNO VIII. LUGLIO, AGOSTO E SETTEMBRE 1905.



BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA
E STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA DI

GINO LORIA

Editore: **Carlo Clausen, Hans Rinck** Succ. Torino — Del *Bollettino* si pubblicheranno ogni anno quattro fascicoli di almeno 32 pag. — Prezzo d'abbonamento annuo: Per l'interno L. **6**, per l'estero Fr. **7.50**. Numeri separati L. **2** caduno. Gli articoli da inserirsi si mandino al *Prof. G. Loria*, Università di Genova.

SOMMARIO

G. LORIA. « Unicuique suum ».

Recensioni ed annunzi: MARCOLONGO, *Meccanica* [T. Levi-Civita]. — MACH, *La meccanique* [G. L.]. — SCHLOMILCH, *Übungsbuch* I. Tl. [G. L.]. — ROUSE BALL, *Storia delle matematiche* [R. Bonola]. — NETTO, *Elementare Algebra* [G. L.]. — SCHLESINGER, *Differentialgleichungen* [G. L.]. — PINCHERLE, *Analisi algebrica* [G. L.]. — DUMONT, *Géométrie du 3e ordre* [G. L.]. — HALSTED, *Rational Geometry* [G. Vailati]. — MACFARLANE, *Bibliography of quaternions* [G. L.]. — *Atti del Congr. internaz. di sc. storiche* [G. Vivanti]. — RUNGE, *Theorie und Praxis der Reihen* [G. L.]. — SERRET, *Differential-und Integralrechnung* [G. L.]. — SCHUSSLER, *Orthogonale Axonometrie* [G. L.]. — SCHILLING, *Ueber die Anw. der darstell. Geometrie* [G. L.]. — BORTOLOTTI, *Calcolo degli infinitesimi* [G. Vivanti]. — STOLZ-GMEINER, *Funktionentheorie* [G. Vivanti]. — VRIES, *Zentralprojektion* [G. L.]. — DEDEKIND, *Stetigkeit und irrationale Zahlen* [G. L.]. — MANDART, *Géométrie analitique* [G. L.].

Programmi e riassunti di corsi universitari: Università di Pavia. Corsi di Analisi superiore tenuti dal Prof E Pascal.

Notizie: Guido Hauck. — A. Comte e la storia delle scienze. — Biblioteca scolastica. — Concorsi a premi. — I sogni e l'ispirazione matematica. — Per gli amatori di ritratti — Pubblicazioni recenti sulla storia delle matematiche. — Un'opera in corso di pubblicazione. — Galileo ed il concetto moderno d'infinito. — Una bibliografia delle curve algebriche. — Modelli di matematica.

« UNICUIQUE SUUM »

Nota di GINO LORIA.

Nell'anno 1801 venne pubblicato a Parigi un volumetto in 8.° di 147 pagine e tre tavole litografate recante il titolo *Elémens de géométrie par* J. J. ROUSSEAU (1). In un « Avis de l'éditeur » sono lodati i meriti dell'opera ed è espressa la meraviglia che sia stata negletta in Francia, mentre essa contribuisce a formare in Italia e « nella parte meridionale dell'impero » degli ottimi geometri. E nella prefazione dell'autore si legge fra l'altro: « je n'ai pas au dessous de moi, de consacrer à une entreprise aussi louable des momens que je dèrobois à la contemplation des mystères de la Géométrie nouvelle ».

(1) Su di esso attiro la mia attenzione il chiariss.mo Prof. M. Pieri.

Digitized by Google

Ora la possibilità *a priori* di un trattato di geometria elementare del grande filosofo ginevrino appare evidente a chi ricordi la norme da lui esposte nell' *Emile* sull' indirizzo da darsi ad un primo studio della geometria (1) e l'avere egli scritto nelle *Confessions* ciò che segue: « Je ne goûtai pas la géométrie d'Euclide qui cherche plutôt la chaine des démonstratios que la liaison des idees; je préférai la géométrie des Père Lami (2) qui dès lors devint un de mes auteurs favoris et dont je relis encore avec plaisir les ouvrages ». Ma all' essersi Rousseau lasciato sedurre dall' alta geometria contrasta la seguente dichiarazione da lui fatta in continuazione del passo testè riferito « Je n'ai jamais été assez loin pour bien sentir l' application de l' algèbre à la géométrie. Je n' aimais point cette manière d'operer sans voir ce qu'on fait; et il me semblait que resoudre un problème de géométrie par les equations, c'était jouer un air en tournant une manivelle ». Esaminando poi il volume in discorso vi si trovano delle innovazioni poco numerose e di scarso valore, alcune delle quali, anzi tendendo a fare perdere il carattere puramente ideale alle figure matematiche, meritano la disapprovazione di chi vuole che la geometria non abbandoni la diritta via tracciatale da Euclide; tali sono l' introduzione dei punti fisici (palline), delle linee fisiche (fili) e delle superficie fisiche (fettine di solidi), che auguriamo non venga mai più adottata. Siffatte caratteristiche non sono abbastanza spiccate per permettere di decidere, in base a ragioni intrinseche, dell' autenticità di quell'opera, nè può aiutare a farle il carteggio del d'Alembert, che pure contiene una lettera all' autore dell' *Emile*, non però di argomento scientifico (3). Ma su quell' autenticità nascono dei dubbi considerando che nelle *Oeuvers complètes de* J. J. ROUSSEAU pubblicate in 34 volumi a Basilea negli anni 1793-95 non sieno stati inseriti quelli *Èlémens*, e che nessuno dei dizionari biografici (primo fra tutti il Poggendorff), nessuna delle storie letterarie, nessuno dei molti biografi che ebbe quel grande pensatore ne abbia fatto il cenno più fugace. Ora la spiegazione di tutto ciò è data dal Quérard, il quale nell' eruditissima opera dal titolo *Les supercheries littéraires dévoilées*, dopo di avere riferito il titolo dell' opera in discorso, dice (T. III della 2.ª edizione, Paris, 1882, col. 460): « Ce livre parut la première fois a Milan en 1774, avec le nom du P. Rossignol (4). Comment est on arrivé en France à le reimprimer sous le nom de J. J. Rousseau? ». La ragione è semplice: l' editore, per assicurare lo spac-

(1) V. i libri II e III di quella celebre opera (*Oeuvres de J. J. Rousseau*, T. VII, Genève, 1793, p. 265, T. VIII, p. 6).

(2) B. LAMY. *Élémens de Géométrie*, Paris, 1685 (4.ª ed. 1710).

(3) *Bull. di bib. e storia delle scienze mat. e fis.*, T. XVIII, 1885, p. 525.

(4) Ed un' altra volta a Torino nel 1803.

Digitized by Google

cio di quella pubblicazione pensò non a torto che il pubblico, il quale sarebbe rimasto indifferente, che forse sarebbesi dimostrato ostile, ad un trattato di un gesuita oscuro e profugo, all' opposto avrebbe fatto festose accoglienze ad una produzione scientifica di uno dei letterati a lui più caramente diletti. Evitare che di tale indegna soperchieria, non sufficientemente nota ai matematici, sia vittima anche qualche nostro lettore, ecco il modesto scopo del presente articolo!

RECENSIONI ED ANNUNZI

R. MARCOLONGO. — « *Meccanica razionale* ». Vol. I: *Cinematica — Statica.* Vol. II: *Dinamica — Principii di idromeccanica — Due manuali Hoepli;* Milano, 1905.

Ecco un trattato eminentemente moderno.

L'A., pur rispettando, nella orditura generale, la tradizione classica, ha largamente accolto i più recenti perfezionamenti. Ed ha saputo così bene collegarli allo svolgimento dell' insieme che si potrebbe credere ne costituissero da tempo parte integrante.

Fra le innovazioni, cito in primo luogo l'uso sistematico del calcolo vettoriale, che, nelle questioni attinenti ai corpi rigidi (dove risponde alla natura delle cose), realizza notevole economia di pensiero e agilità di maneggio formale.

Non v' è oggi, si può dire, trattato di meccanica, che non faccia parte alla teoria dei vettori, ma finora solo pochi, e con tendenze esclusiviste, portavano il lettore a pensare e ad operare vettorialmente. Grazie al saggio e addottrinato eccletismo del Marcolongo, la piena convenienza del metodo può dirsi ormai fuori di questione, anche e specialmente dal punto di vista didattico.

Quanto ai simboli, l'A., seguendo Peano, ha senz' altro adottati quelli di Grassmann. La soluzione non può certo dirsi cattiva, ma sta il fatto che, pur in meccanica e in fisica matematica, altri autori (Heaviside, Gibbs, Föppl, Ferraris, Donati, Lorentz, Sommerfeld, ecc.) usano diverso simbolismo, mentre sarebbe certo possibile e desiderabile che si stabilisse una intesa comune.

Al prossimo congresso matematico l' esaudimento di questo voto modesto!

Come nell' uso corrente del calcolo vettoriale, così c' è novità d' indirizzo nella esposizione della cinematica, negli accenni ai parametri

Digitized by Google

di Klein, ai sistemi anolonomi, alle viti di Ball, nelle applicazioni numerose e svariate, che si trovano alla fine di ciascun capitolo, e lo illustrano e lo completano in modo felicissimo.

L'A., è altrettanto pronto e volonteroso interprete della modernità, quanto vigile custode delle conquiste del passato e diligente ricercatore di notizie storiche.

Così egli si compiace di riportare taluna dimostrazione classica come si trova nell'originale, ed ha cura di tratteggiare in apposite note bibliografiche lo svolgimento storico di ciascuna teoria.

L'opera è divisa in due volumi. Ecco, attraverso le mie impressioni, l'ordine degli argomenti.

Dopo la teoria dei vettori viene la cinematica, che l'A. vivifica chiamando a contributo più forme di intuizione geometrica, dando ampia e pur concisa raccolta delle proprietà dei moti piani e sferici, e aggiungendo interessanti notizie sui sistemi articolati e sugli strumenti grafici, che ne derivano.

Come si sa, la statica dei sistemi rigidi ha avuto origine e assetto definitivo per via sintetica. Il Marcolongo ce ne presenta una ricostruzione, che, senza rinunciare alla spontaneità dei vecchi modelli, tien conto delle esigenze critiche (1). Passa quindi ad esporre il principio generale dei lavori virtuali, contemplando spostamenti reversibili ed irreversibili, vincoli olomomi ed anolomomi, e mostrando come il principio si giustifica per via induttiva mediante un'accurata analisi di molti casi particolari. Sono poi svolte alcune applicazioni, ed è anticipata e illustrata su acconci esempi la nozione di stabilità.

Chiude il volume la statica dei fili flessibili e inestendibili, dedotta dal principio dei lavori virtuali.

Leggi del moto, dinamica del punto materiale, e problemi che vi si connettono (moto nei mezzi resistenti, moto dei corpi celesti, moto relativo dei gravi, moti vincolati, pendolo piano e conico. pendolo di Foucault, tautocrone e brachistocrone) costituiscono i due primi capitoli del secondo volume.

Ed eccoci al principio di d'Alembert colle sue conseguenze analitiche e meccaniche. Qui forse non si riscontra quella nitidezza e quel senso di misura, che informano le rimanenti parti dell'opera.

Ad esempio l'enunciato del principio non è accompagnato dalla precisa indicazione di ciò che si debba intendere per spostamento virtuale. Nè è il caso di riportarsi senz'altro alla definizione datane in statica,

(1) A questo proposito debbo però fare una piccola osservazione. A pag 160 (teor. III) si invoca il principio: Due forze eguali ed opposte, applicate ad un sistema rigido, lo tengono in equilibrio. Nulla di più legittimo, ma sarebbe stato indubbiamente opportuno, indicarlo tra i postulati, poichè mi pare indipendente da quelli, che si trovano enunciati esplicitamente.

Digitized by Google

poichè il principio abbraccia anche vincoli dipendenti dal tempo. L'A. lo fa osservare, ma solo molto più innanzi, quasi incidentalmente, a proposito dell' integrale delle forze vive.

Del pari sarebbe stato a mio avviso preferibile omettere del tutto i teoremi di Jacobi, i principi dell' azione e di Hamilton, piuttosto che costringerli in limiti così angusti che mal se ne può cogliere il vero significato, la generalità e l' importanza.

Dopo questi appunti, parrà anche più schietto e meritato l' elogio, che mi appresto a tributare ai capitoli successivi. E veramente la dinamica dei sistemi olonomi è ad un tempo riassunto brillante ed esposizione spigliata di quanto è stato scritto in argomento: dall' « Orologium oscillatorium » di Huygens fino alle teorie del bigliardo e della bicicletta, passando attraverso Eulero, Lagrange, Poinsot, Jacobi, e dando pur notizia degli sviluppi matematici più recenti, che si riattaccano al problema della Kovalevski.

Egualmente notevole nella sua semplicità è lo svolgimento dato dall'A. alla teoria dell' attrazione newtoniana e in particolare dell'attrazione degli elissoidi.

Finalmente degnissime di attenzione sono le nozioni di idrostatica e di idrodinamica, con cui l' opera si termina. L'A. ha saputo condensare in poche pagine l' ordinario programma dei nostri corsi, riescendo con sottile abilità a includere negli esercizi i principi di molte teorie importanti (equilibrio delle masse fluide uniformemente ruotanti, stabilità dei galleggianti, moto di un solido nel seno di un fluido incompressibile).

Il lungo studio e il grande amore, con cui il prof. Marcolongo ha elaborato le sue lezioni, rendono la presente pubblicazione preziosa agli studenti e agli studiosi, che troveranno nei molti e suggestivi esempi il più sicuro ed utile ausilio alla piena intelligenza del testo.

Egregiamente — la constatazione fa pur piacere — anche la stampa, che in Italia è di solito così poco curata quanto a corretta ed estetica struttura delle formole: non però dalla *Tipografia Matematica di Palermo*, cui, per espresso desiderio dell' autore, fu dall' editore Hoepli affidata la composizione di questi due manuali.

T. Levi-Civita.

E. Mach, — *La mécanique. Exposé historique et critique de son développement. Ouvrage traduit sur la 4.e éd. allemande par* E. Bertrand. *Avec une Introduction de* E. Picard. Paris, Hermann, 1904, 8.° gr., p. IX + 498 (Prezzo fr. 15).

Fra le opere di storia e filosofia scientifica apparse nella seconda metà dal secolo scorso nessuna può vittoriosamente competere per

Digitized by Google

larghezza e profondità di vedute e per ampia diffusione cou quella che il Mach consacrò alla meccanica. Essa è favorevolmente nota anche in Italia, nelle regioni più elevate del mondo degli studiosi; ma alla traduzione francese che oggi ne annunziamo sembra affidato il compito di allargarne di molto il campo di influenza, cosa di cui ci rallegriamo anticipatamente, perchè il popolarizzare la conoscenza delle varie fasi di sviluppo di una scienza il cui indirizzo è tuttora soggetto di discussione equivale a illuminare chi intenda di decidere a schierarsi fra coloro che vogliono la meccanica sia un capitolo della fisica, oppure fra quelli che cercano in essa soltanto l' occasione a ricerche matematiche.

G. L.

O. Schlömilch. — *Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis.* I. Teil: *Aufgaben aus der Differentialrechnung.* 5. Aufl. Bearbeitet von E. Naetsch. Mit 85 Figuren im Text. Leipzig, Teubner, 1904. 8.°, p. VIII+372 [Prezzo del vol. leg. Mk. 8].

Alle quattro edizioni (1868, 1873, 1878, 1887), che ebbe l' opera presente per cura dell' autore, ne segue ora una postuma; prova questa novella della eccellenza di tale opera. Le aggiunte e le modificazioni apportatevi dal Prof. Naetsch ne lasciarono intatta la fisonomia, ma la ringiovanirono in più parti. Possa questo cenno agevolare la diffusione in Italia di un lavoro didattico che, se non erriamo, è tra noi meno noto di quanto meriterebbe.

G. L.

W. W. Rouse Ball. — *Breve compendio di storia delle matematiche. Versione dall' inglese con note aggiunte e modificazioni dei Dottori* D. Gambioli *e* G. Puliti, *riveduta e corretta dal Prof.* G. Loria, Vol. I, p. VII+284, Bologna, Zanichelli, 1903, Vol. II, p. 439. Bologna, Zanichelli, 1804 [Prezzo L. 8 × 12].

L' importanza e l' estensione, che in questi ultimi annì acquistarono le ricerche storiche sulla matematica, resero ancor più vivo e sentito il desiderio di un libro di *Storia delle matematiche*, adatto per tutti coloro che hanno una certa famigliarità con quella scienza. Benchè l' Italia non manchi di chi possa lodevolmente accingersi a comporlo, le difficoltà da vincersi sono tali e tante che l' ardua impresa non fu ancora tentata. Era perciò naturale ricorrere agli storici d' oltr' alpe, per presentare ai nostri giovani un quadro dell' evoluzione storica delle discipline matematiche.

Fra le opere del genere indicato che videro fin' ora la luce, quella

Digitized by Google

che venne accolta con maggiori elogi è *A short account of the history of mathematics* di W. W. Rouse Ball, che in poco più di un decennio raggiunse la 4.ª edizione.

Il prof. Loria [gentilmente egli ci comunica], richiesto di consiglio dai signori Puliti e Gambioli, pur non reputando perfetta l'opera del Ball, nè rispondente alle idee da lui espresse in varie pubblicazioni, non esitò un istante a consigliarla, come quella da prescegliersi fra le congeneri per una versione italiana.

Il libro del Ball vuol essere un' opera popolare, di facile lettura, adatta anche per coloro che desiderano notizie dei fatti più importanti della Storia delle Matematiche e che non hanno nè il tempo nè la volontà di studiarli sistematicamente. Il metodo espositivo adottato dall'autore è il biografico; infatti egli espone la storia delle matematiche, attraverso gli uomini che per esse si resero celebri. Se questo metodo è consentaneo all'indole del pubblico, a cui principalmente è dedicato il volume, non è però il più adatto a seguire, in un senso un po' più elevato, lo sviluppo storico delle idee; in questo senso gli uomini scompaiono e le loro biografie, gli annedoti che ad essi si riferiscono, poco o nulla aggiungono alla storia della scienza.

La storia del Ball è preceduta da una introduzione, ed è divisa in quattro periodi.

L'*introduzione* [Cap. I] contiene un breve cenno di ciò che si sa intorno alla matematica degli Egiziani e dei Fenici.

Il 1.° *periodo*, che comincia con Talete (600 anni av. C. e finisce con la cattura di Alessandria per opera dei Maomettani (641 d. C.), è caratterizzato dallo svolgersi della geometria. Si riferisce alla matematica sotto l'influenza greca, cioè alle *scuole jonica* e *pitagorica* [Cap. II], alle *scuole* di *Atene* e di *Cizico* [Cap. III], alle *prime e seconda scuola alessandrina* [Cap. IV, V], alla *scuola bizantina* [VI].

Tutto quanto forma oggetto dei sistemi di numerazione e dell'aritmetica durante questo periodo è poi raccolto nel cap. VII.

Il 2.° *periodo*, che comincia verso il VI secolo e termina il XVI, si riferisce alle matematiche dei tempi di mezzo. In questo tempo si assiste al risorgere della dottrina nell' Europa occidentale [Cap. VIII]. allo svolgimento delle matematiche presso gli Arabi [cap. IX], alla introduzione in Europa delle opere di questi [Cap. X], e allo svolgimento dell'aritmetica [Cap. XI].

Il 3.° *periodo*, che va dal 1450 al 1677, si riferisce alle matematiche durante il Rinascimento; i suoi tratti caratteristici sono dati dallo svolgimento dell'algebra e della trigonometria [Cap. XII].

Il 4.° *periodo*, che dal 1635 viene ai giorni nostri, si riferisce alle matematiche moderne, i cui caratteri salienti sono dati dalla fondazione e successivo sviluppo della Geometria analitica del Calcolo infi-

Digitized by Google

nitesimale, della Meccanica razionale, della Fisica Matematica e delle Matematiche Superiori [dal Cap. XIV al XIX].

I traduttori, nel volgere in italiano, l'opera di ROUSE BALL, vi introdussero modificazioni ed aggiunte, il Prof. G. LORIA (il cui nome figura nel frontispizio della traduzione) rivide le prove di stampa e contribuì a correggere molti dati di fatto e ad aggiungere buon numero di notizie, ch'era doveroso non passare sotto silenzio.

Fra le aggiunte dei traduttori vanno segnalate, per la loro mole, le seguenti:

1.° La *nota sulla scuola pitagorica* del compianto Dott. PULITI [I Vol., p. 275-284] che si riferisce principalmente alle regole, ai precetti [simboli] e all'indirizzo di tale scuola.

2.° La I Appendice dovuta al Dott. GAMBIOLI [I Vol., p. 257-278] contenente biografie e cenni dell'opera di alcuni autori stranieri fugacemente nominati nel testo e di altri non nominati.

3.° La II Appendice, *su alcuni matematici italiani dei tempi recenti*, pure dovuta al GAMBIOLI [Vol. II, p. 279-439]. Delle aggiunte questa è la più voluminosa e nel compilarla l'autore distribuì i matematici italiani, che dalla seconda metà del XVIII secolo vengono ai nostri giorni, in tre gruppi.

Nel gruppo dei *geometri* troviamo MASCHERONI, FERGOLA, FLAUTI, GIORGINI, CHELINI, BELLAVITIS, BEDETTI, SANNIA, BATTAGLINI, ARMENANTE, DE-PAOLIS, CAPORALI, CREMONA. Nel gruppo degli *analisti* troviamo LORGNA, SALADINI, MALFATI, FONTANA, PAOLI, RUFFINI, BRUNACCI, ABBATI, BORDONI, TUCCI, MOSSOTTI, PIOLA, FRULLANI, MAINARDI, TORTOLINI, MINICH, MAGGI, TRUDI, CHIÒ, DEL GROSSO, TURAZZA, PADULA, GENOCCHI, RUBINI, BETTI, CODAZZI, BRIOSCHI, BELTRAMI, CASORATI, PADOVA, PADELLETTI, ASCOLI, CAZZANIGA, DINI.

Finalmente nel gruppo degli *storici della matematica*, sono ricordati il COSSALI, il LIBRI, il BONCOMPAGNI e il RICCARDI.

Di ciascuno dei nominati autori il GAMBIOLI tesse una rapida biografia ed assegna un elenco delle opere principali.

Lo scopo che si propone il GAMBIOLI con questa appendice è di far conoscere i nostri matematici, rendendo loro in pari tempo un doveroso omaggio, e mostrare tanto agli Italiani quanto agli stranieri, come i nostri connazionali di questi ultimi tempi, non abbiano in alcun modo demeritato in confronto dei loro predecessori. R. BONOLA.

E. NETTO. — *Elementare Algebra. Akademische Vorlesungen für Studierende der ersten Semester.* Mit 19 Figuren im Text. 8.° gr., p. VIII + 200, Leipzig, Teubner, 1904 [Prezzo del vol. leg. Mk. 4.40].

Questo volume deve la sua origine ad un corso di lezioni elementari di algebra tenute nell'Università di Giessen e ne conserva il carattere.

Digitized by Google

« Il carattere di lezioni », avverte l'A. « si trova in ciò che non si è seguito rigorosamente un sistema; che di molte questioni si è fatto piuttosto un cenno che un' esauriente trattazione; che certi temi vennero abbandonati in un dato momento per essere ripresi più tardi. Per ciò questo libro svolge ed applica una serie di concetti per preparare il lettore all' algebra superiere. Altri concetti vennero ad arte lasciati in disparte; così lo furono tutti quelli che toccano il dominio della filosofia. I principianti hanno ancora il diritto di credere ai numeri irrazionali, di accettare con riconoscenza e senza critica il campo complesso come un ausilio indispensabile ». Queste parole chiariscono lo scopo che l'A. si è proposto. Aggiungeremo che negli otto capitoli in cui egli divise la propria opera egli si è occupato dei temi seguenti: I. Equazioni di 1.° grado. — II. Equazioni di 2.° grado pure. — III. Equazioni di 2.° grado generali. — IV. Analisi combinatoria; teoremi del binomio e del polinomio. — V. Determinanti e sistemi di equazioni lineari. — VI. Equazioni di 3.° grado pure. — VII. Equazioni di 3.° grado. — VIII. Equazioni di 4.° grado. Come novità in un libro elementare noteremo i cenni sulla ricerca delle probabilità che le radici di un' equazione quadratica o cubica siano reali; le ricerche analoghe per le equazioni di grado superiore esigerebbero la considerazione di spazi a 4 o più dimensioni.

G. L.

L. Schlesinger. — *Einführung in die Theorie der Differentialgleichungen mit e. unabhängigen Variabeln.* 2., revidierte Auflage. Leipzig, Goeschen, 1904, 8.°, p. 320 [Prezzo del vol. leg. Mk. 8].

Questo volume è già noto ai nostri lettori (v. *Bollettino*, IV, 1901, pagg. 112-114). L'essersi manifestato, a soli tre anni di distanza, il bisogno di una nuova edizione, è segno certo che il pubblico matematico riconobbe nel trattato dello Schlesinger le buone qualità rilevate in essa dal Prof. Vivanti. Non va taciuto che lievi ritocchi e qualche aggiunta rendono la II edizione ancor superiore alla I.

G. L.

S. Pincherle. — *Lezioni di analisi algebrica, date nella R. Università di Bologna e redatte per uso degli studenti.* Fascicolo Primo (Cap. I-VI) Bologna, Zanichelli 1905, 8° pag. 143 (Prezzo L. 2.).

I primi tre dei sei capitoli costituenti il presente volumetto vennero già pubblicati dall' A. quattro anni or sono (v. *Bollettino*, T. IV, 1901, pag. 17-18). Gli altri, scritti con analoghi intendimenti, concernono risp. *I numeri complessi*, gli *Elementi della teoria dei limiti* ed alcune

Digitized by Google

Generalità sulle funzioni. È da augurare che il favore del pubblico incoraggi l'A. a pubblicare anche le altre parti del suo corso d'analisi algebrica; i nostri studenti avranno allora un'ottima guida completa per lo studio di tale importante disciplina.

G. L.

F. DUMONT. — *Introduction à la géométrie du troisième ordre.* Annecy 1904, 8° p. IX + 313.

Seguendo l'esempio del LE PAIGE l'A. chiama *geometria di terzo ordine* il complesso delle proprietà delle terne di punti, delle cubiche piane e gobbe e delle superficie del terz'ordine; coll'opera presente egli intese di far una esposizione metodica elementare, piuttosto analitica, di tali proprietà. Per porgere al lettore un'idea del piano di tale opera, indicheremo il contenuto dei 17 capitoli di cui consta:

I. Terne di punti. II. Generalità sulle cubiche piane. III. Poli e polari rispetto ad una cubica piana. IV. Classificazione delle cubiche piane V. Intersezione di una cubica piana con una retta, una conica od un'altra cubica. VI. Fasci, reti, ecc. di cubiche piane. VII. Fuochi e trasformazioni delle cubiche piane. VIII. Cubiche gobbe. IX. Le rette di una superficie generale del 3° ordine. X. Metodi di generazione. XI. Singolarità delle superficie cubiche. XII. Poli e polari rispetto ad una superficie di 3° ordine. XIII. Classificazione. XIV. Intersezione di una superficie cubica con un piano, una quadrica od un'altra superficie cubica. XV. Fasci, reti ecc. di superficie cubiche. XVI. Rappresentazione di una tale superficie su di un piano. XVII. Trasformazioni diverse di una superficie di 3° ordine.

Lo stile semplice e la collezione di esercizii rendono raccomandabile la modesta opera del Sig. Dumont a chi imprende lo studio delle figure di cui egli si è occupato.

G. L.

G. B. HALSTED. — *Rational Geometry. A Textbook for the Science of space, based on Hilbert's Foundations.* New York 1906, 8.°.

Il tentativo dell'Halsted di costruire un testo scolastico sulle basi del noto lavoro dell'Hilbert citato nel titolo, fornisce un interessante saggio dei vantaggi, e insieme degli inconvenienti cui può dar luogo l'applicazione sistematica e coerente de' risultati delle recenti ricerche sui « fondamenti » della geometria, coll'insegnamento della geometria elementare.

Digitized by Google

Tanto gli uni che gli altri sono, per più d'un rispetto, alquanto differenti da quelli che si potrebbe esser condotti a prevedere.

Così, ad esempio, per cominciare dai vantaggi, un carattere che, nel presente volume, salta subito all'occhio, e che potrebbe sembrare incompatibile, colla preoccupazione di dare alla trattazione un aspetto quanto più è possibile rigoroso, è la maggior concisione e sveltezza che, in confronto a quanto avviene nei testi ordinari, vi assume la parte destinata alle considerazioni preliminari, all'enunciazione di presupposti fondamentali, e alla dimostrazione dei primi teoremi elementari da essi direttamente dipendenti.

A ciò contribuisce essenzialmente la classificazione, o raggruppamento, dei suddetti presupposti *(assumptions)* nelle note cinque classi, adottate dall'Hilbert, costituite, la prima dalle proposizioni che si riferiscono alla *determinazione* di rette e piani mediante punti *(Verknüpfungs-Axiome)*, la seconda delle proposizoni relative all'*ordine* e alle relazioni del « succedersi » e del « separarsi » dei punti d'una linea *(assumptions of betweenness)*, la terza dai postulati relativi alla congruenza e al movimento, le ultime due, infine, rispettivamente dal postulato delle parallele e dal cosidetto postulato d'Archimede.

Una tale classificazione, nel mentre facilita grandemente il riscontro delle proposizioni da cui dipendono i successivi teoremi, rende anche possibile aumentare, senza alcun pericolo di confusione, e senza affatto pregiudicare qualsiasi ulteriore ritorno sull'argomento, il numero delle proposizioni che, in ciascuna delle dette classi, vengono inizialmente ammesse senza dimostrazione. Le questioni relative alla loro eventuale ridondanza, o alla « riduzione » di alcune di esse alle rimanenti, ecc., possono così essere riservate a un successivo stadio dell'esposizione, o anche, come fa appunto l'A., rimandate ad apposite appendici.

La teoria delle proporzioni viene svolta, come nel volume dell'Hilbert, evitando il ricorso al postulato d'Archimede, e introducendo anzitutto (secondo il metodo che, ben prima dell'*Hilbert* era stato indicato da *Vitale Giordano* sul suo *Euclide restituito*, pubblicato nel 1680) il concetto di « prodotto » di due segmenti, definito questo come il segmento che si ottiene eseguendo, sul segmento scelto come unità, e sui due segmenti dati, le operazioni grafiche che conducono alla costruzione del segmento quarto proporzionale.

Per dimostrare, che il prodotto, così definito, gode della proprietà associativa, cioè che $abc = a(bc)$, si fa uso del teorema relativo all'esagono inscritto in una coppia di rette, del quale vien data, seguendo lo Schur, l'elegante dimostrazione basata sull'applicazione ripetuta della proposizione che le tre altezze d'un triangolo concorrono in un punto.

Si passa poi alla trattazione dell'equivalenza, nella quale, seguendo

Digitized by Google

ancora la via tracciata dall' Hilbert, dopo aver dimostrato che in un triangolo il prodotto, d' un lato per la corrispondente altezza, non dipende dalla scelta del lato, si definisce senz' altro come « area » del triangolo la metà di tale prodotto (pg. 114). Ancora più che nel caso delle proporzioni si manifestano qui gli inconvenienti didattici inerenti a una esposizione nella quale la preoccupazione di garantire l' assoluto rigore e la perfetta coerenza logica delle dimostrazioni, « depurandole » da ogni suggestione intuitiva derivante dalla contemplazione delle figure, prenda troppo il sopravvento, sopra l' altra esigenza, didatticamente altrettanto importante, di tener conto delle analogie che connettono le nozioni o le operazioni, successivamente prese in considerazione dalla teoria generale, con quelle meno astratte e, per così dire, più materiali di cui esse costituiscono un' « idealizzazione », o un raffinamento ulteriore.

Sono evidenti, ad esempio, gli svantaggi che apporta lo stabilire un troppo grande distacco fra il procedimento seguito nella trattazione generale delle proporzioni tra segmenti e quello seguito nel caso delle proposizioni tra numeri o tra segmenti commensurabili.

È parimenti lontano dal soddisfare a questa esigenza il procedimento seguito dall' A. quando presenta la proposizione che l' area d' un settore circolare è data dalla sua lunghezza per la metà del suo raggio, come una « definizione » (pg. 132) e quando fa lo stesso per la superficie della sfera (pg. 201), senza connettere in alcun modo tali definizioni le une alle altre, come d'altronde non giustifica, nel caso del triangolo o del tetraedro (pg. 167), i coefficienti $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ che figurano nella definizione che dà rispettivamente delle loro aree e volumi. Tali coefficienti potrebbero infatti venir sostituiti da qualunque altro numero senza che cessasse di sussistere la proprietà fondamentale, alla quale egli fa appello, cioè che l' area o il volume d' una figura composta di più altre è uguale alla somma delle aree o dei volumi di queste.

Non si vede bene per qual ragione l'A. non abbia ritenuto opportuno di seguire anche nei suddetti due casi una via analoga a quella che egli pur segue pel volume del cono e per quello della sfera, applicando quello che egli chiama il postulato di Cavalieri, secondo il quale se le sezioni fatte in due solidi, compresi tra due piani paralleli, da qualunque piano parallelo a questi, sono di egual area, i due solidi sono di egual volume.

Nel caso della sfera questo principio è da lui reso applicabile, dimostrando la seguente interessante proposizione.

« Se una sfera è tangente a due piani paralleli contenenti due spigoli opposti di un tetraedro e se le Sezioni fatte, nella sfera e nel tetraedro, da *un* piano parallelo ai suddetti, sono di egual area, lo stesso

Digitized by Google

si verifica anche per le sezioni fatte nei due solidi da *qualunque* altro piano parallelo ai primi ».

Nel capitolo (VI), dedicato ai « problemi di costruzione » e nel quale vengono indicate le soluzioni che, col solo aiuto della riga e del trasportatore dei segmenti (see-carrier), si possono ottenere dei problemi grafici fondamentali, quali la bisezione di segmenti o di angoli, il tracciamento di parallele e perpendicolari a date rette, la costruzione di un angolo eguale a un angolo dato ecc., è chiaramente caratterizzato l'ufficio che a tali soluzioni di problemi compete, in quanto esse provano che » l'esistenza » di punti, o rette, o figure soddisfacenti a date condizioni, risulta come conseguenza dei postulati « esistenziali » assunti a base della trattazione. Non vi si insiste invece abbastanza sul fatto che tali soluzioni servono anche a far rilevare la superfluità di alcuni di tali postulati; ad esempio la soluzione del problema di costruire un angolo eguale a un angolo dato, rende inutile l'ammissione del postulato (III^4) affermante l'esistenza di un angolo eguale a un angolo dato e avente un lato su una retta data: precisamente come, in Euclide, la soluzione del problema di costruire su una data retta, a partire da un punto dato, un segmento uguale a un segmento dato rende inutile postulare l'esistenza di tale segmento, in quanto fa constatare come essa risulta come conseguenza dell'ammissione, già fatta, che si possa costruire un cerchio con qualsiasi centro e passante per qualsiasi altro dato punto.

Un rilievo, infine, di pura forma, e sul quale richiamiamo l'attenzione dell'A per. una prossima edizione del suo volume, si riferisce alla scorretta ortografia delle parole *ipotenusa* e *parallelepipedo*, che l'A. scrive nel modo seguente: *hypotenuse* e *parallelopiped* (*sic*), come non farebbe nessuno che ne avesse presente l'etimologia e il significato originario.

G. Vailati.

A. Macfarlane. — *Bibliography of Quaternions und allied Systems of mathematics*. Dublin, University Press, 1904. 8.°, p. 86.

È questa la prima pubblica manifestazione di vita data sino ad ora dall'Associazione internazionale su cui già più di una volta intrattenemmo i nostri lettori (v. *Bollettino* II, 1899, p. 111; V, 1902, p. 38). È un elenco alfabetico che comprende (se non c'inganniamo) 1177 pubblicazioni; è un bel nnmero! Non va però dimenticato che comprende non poche ripetizioni; così due lavori di Galileo Ferraris vengono notati anche sotto i nomi del Segre e del Finzi che ne curano la pubblicazione; così le opere del Grassmann riappaiono anche sotto i nomi dello Study e dell'Engel che si occupano della loro stampa; ecc. ecc.

Digitized by Google

Non possiamo a meno di notare anche come di certi lavori il Macfarlane evidentemente non conobbe che il titolo, onde a torto li incluse nel suo elenco; citiamo a semplice titolo d'esempio una memoria del Retali e due del Segre. Aggiungiamo che egli incluse anche le biografie di coloro che coltivarono l'analisi vettoriale e perfino certi articoli bibliografici. Sarebbe stato desiderabile che l'elenco in discorso fosse stato seguito da altro in ordine cronologico, il quale avrebbe permesso di seguire lo svolgimento storico delle teorie in questione; inoltre il Macfarlane che conosce così bene siffatte teorie avrebbe potuto applicare il nostro sistema degli asterischi (v. *Bollettino* III, 1900, p. 67-70) e fornire così un aiuto prezioso a coloro che vogliono ad esse dedicarsi. Ma, anche nello stato attuale, il lavoro da lui compilato, come tutte le pubblicazioni bibliografiche coscienziose, potrà essere utile a molti, prestando agli studiosi segnalati servigi.

G. L.

Atti del Congresso internazionale di scienze storiche (Roma, 1-9 aprile 1903) Vol. XII. *Atti della Sezione VIII: Storia delle scienze fisiche, matematiche, naturali e mediche.* Roma, Tipografia della R. Accademia dei Lincei, 1904. XXIV + 330 p. 8°.

Questo interessantissimo volume, che attesta la serietà d'intenti a cui si è informata la Commissione ordinatrice della Sezione VIII del Congresso storico e la buona accoglienza che ha avuto la sua opera dagli scienziati di tutto il mondo, si divide in tre parti: *Verbali delle sedute* (p. III-XXIV), *Relazioni sui temi* (p. 1-30), e *Comunicazioni* (p. 31-327).

I temi discussi furono 5, e cioè:

I. *L'iconografia degli eclissi di sole, contenuta nel mirabile Canone degli eclissi di T. Oppolzer, non serve per le ricerche storiche nell'accertamento delle date. La recente opera di T. K. Ginzel contiene un Atlante degli eclissi di sole, totali e anulari per la regione della antica civiltà classica, e per l'intervallo fra — 900 e + 600. Esso risponde ai bisogni storici. Sarebbe opportuna una ripubblicazione del solo Atlante con una prefazione esplicativa, l'opera classica del Ginzel essendo in gran parte tecnica, relativamente costosa e poco nota specialmente nel mondo storico. La riproduzione dovrebbe contenere ancora le date degli eclissi di luna visibili a Roma, Atene, Memfi e Babilonia per il periodo sopraddetto e quando l'eclisse sia stata nella fase massima da un terzo del diametro lunare in su.* Rel. E. Millosevich (p. 3-6).

II. *Propositions ayant pour but d'activer le progrès de l'histoire des sciences.* Rel. P. Tannery. Egli propose che il Congresso confer-

Digitized by Google

masse i voti emessi dal Congresso internazionale di storia comparata (Parigi, 1900), e cioè: Autonomia della storia generale delle scienze, organizzazione dell' insegnamento della storia delle scienze nelle scuole secondarie e superiori, creazione d' una società e d' una rivista di storia generale delle scienze (p. 7-13).

III. *In quale modo ed in quale misura la storia delle scienze matematiche, fisiche, naturali e mediche possa costituire oggetto di un corso universitario.* Rel. D. Barduzzi, P. Giacosa, G. Loria. Dopo aver accennato a ciò che si fa all' estero per la storia delle scienze, ed ai pochi corsi liberi esistenti in Italia, si propone che gli insegnamenti di storia delle varie scienze vengano annoverati fra i corsi complementari, e che si accordino libere docenze per la storia delle varie scienze, considerate separatamente o per gruppi (p. 15-21).

IV. *Un' impresa nazionale di universale interesse (Pubblicazione delle opere di Evangelista Torricelli).* Rel. G. Loria. Egli propone che il Congresso faccia voti perchè il governo intraprenda questa pubblicazione, colla quale avrebbe adempimento il desiderio espresso dal Torricelli morente (p. 23-27).

V. *Proposta di un catalogo completo per materie dei manoscritti scientifici esistenti nelle biblioteche ed archivi del Regno d' Italia.* Rel. P. Giacosa (p. 29-30).

Delle Comunicazioni menzioneremo soltanto quelle che concernono la storia della matematica e della astronomia.

VI. M. Cantor: *Hieronymus Cardanus, ein wissenschaftliches Lebensbild aus dem XVI Jahrhunderte.* Racconta la vita romanzesca di Cardano, e parla delle sue idee come filosofo e come medico (p. 31-43).

VII. M. Darvai: *Vita di Giovanni Bolyai* (p. 45-49).

IX. G. Vacca: *Sulla storia della numerazione binaria.* Si accenna ai Cinesi, a L. Paciuolo, Tartaglia, Bach de Mëziriae Nepero, Bacone, Leibniz, e infine, pei tempi nostri, a Lucas e a Peano (p. 63-67).

XII. E. Lebon: *Plan d' une bibliographie analytique des écuts contemporains sur l'histoire de l'astronomie.* Secondo l' autore, la bibliografia dovrebbe partire dal 1846, e dovrebbe essere divisa in 10 parti come segue: 1. Ricerche sulla storia dell'astronomia. 2. Ricerche sulla storia della cosmogonia. 3. Storie dell' astronomia, astronomie popolari. 4. Biografie di astronomi. 5. Storie delle scienze, contenenti la storia dell' astronomia. 6. Scritti contenenti qualche punto della storia dell' astronomia fisica. 7. Scritti da consultare per comporre la storia della meccanica celeste. 8. Scritti sulla storia della geodesia. 9. Scritti sulla storia della meteorologia. 10. Scritti sulla storia degli osservatorii (p. 81-95).

XIII. E. Lampe: *Das Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Rückblick und Ausblick.* L' autore fa la storia di questo periodico, ed

Digitized by Google

esprime il desiderio che più giovani forze vengano a sollevarlo dal peso della redazione (p. 97-101).

XIV. F. Müller: *Über mathematische Zeitschriften.* L'autore accenna ai principali periodici matematici passati e presenti, e alla lista di abbreviazioni dei titoli dei periodici da lui pubblicata nel T. XII del *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung* (p. 107-113).

XVIII. A. Mori: *Per una bibliografia geodetica italiana.* Annunzio di un suo lavoro in corso (p. 167-169).

XXI. S. Günther: *Lo sviluppo del celebre strumento astronomico-geodetico nominato* JACOBSSTAB, *ovvero* RADIUS ASTRONOMICUS (pagine 187-189).

XXIV. A. Mori: *Il carteggio scientifico di Leonardo Ximenes.* Le lettere ricevute e le minute delle lettere spedite da questo illustre astronomo, fisico e idraulico della seconda metà del XVIII secolo si trovano, insieme agli altri manoscritti di lui, nella Biblioteca Magliabechiana a Firenze (p. 211-213).

XV. G. Enestrom: *Über kulturhistorische und rein fachmässige Behandlung der Geschichte der Mathematik.* L'autore discute i due opposti indirizzi: quello secondo cui si considera la storia d'una scienza come parte della storia della cultura generale, e quello secondo cui gli studiosi di una data disciplina si considerano come isolati nel tempo e nello spazio (p. 215-217).

XXVI. P. Tannery: *Sur l'histoire des mots* ANALYSE *et* SYNTHÈSE *en mathématique.* L'autore stabilisce che:

a) Al senso di composizione e decomposizione per sintesi e analisi ha corrisposto nell'aritmetica greca un uso tecnico di queste parole, che non ha lasciato traccie se non nell'opposizione tra i due termini;

b) Nel senso metodologico queste parole furono introdotte nella filosofia da Descartes (p. 219-229).

XXVIII. G. Vailati: *La dimostrazione del principio della leva data da Archimede nel Libro primo sull' equilibrio delle figure piane.* Mach accusa la dimostrazione d'Archimede di petizione di principio, perchè parte da un caso speciale del teorema da dimostrarsi, cioè dal principio che ad un peso possono sostituirsi due pesi da esso equidistanti ed uguali ciascuno alla metà di esso. L'autore osserva che l'accusa è ingiusta. Egli ritiene poi che il principio ammesso da Archimede sia stato da lui dedotto da certi teoremi relativi ai centri di gravità (p. 243-249).

XXIX. G. Pittarelli: *Intorno al libro « De propectiva pingendi » di Pier dei Franceschi.* È questo il primo trattato completo di prospettiva che sia stato scritto. Fu composto tra il 1470 e il 1490. Fu stampato per la prima volta a Strasburgo nel 1899 (p. 251-266).

XXXI. A. von Braunmühl: *Beiträge zur Geschichte der Integral-*

Digitized by Google

rechnung. Fra gli integrali calcolati da Newton figurano gli integrali trinomi, cioè della forma

$$\int f(x, \sqrt{e + fx + gx^2})\, dx;$$

egli ne riduce il calcolo alla quadratura delle coniche, che considera o come geometricamente nota, o come effettuabile per serie. Cotes ha eseguito analiticamente l'integrazione, esprimendo gli integrali trinomi mediante funzioni logaritmiche e ciclometriche (p. 271-284).

XXXIII. V. Tonni-Bazza: *Frammenti di nuove ricerche intorno a Nicolò Tartaglia*. L'autore pubblica due decreti del Senato di Venezia autorizzanti la stampa di opere di Tartaglia, due istanze di lui al Senato su argomento analogo, l'inventario dei suoi beni redatto dopo la sua morte, una lettera dell'architetto militare Castriotti a Tartaglia e la sua risposta. Parla di un manoscritto della Bodleiana di Oxford, della cui autenticità ora si dubita. Riferisce le ricerche fatte, con esito negativo, per rintracciare l'unico esemplare noto dei cartelli di sfida Tartaglia-Ferrari, già posseduto da Libri, e per trovare le ossa di Tartaglia, che si sa essere stato sepolto nella chiesa di S. Silvestro a Venezia (p. 293-307).

G. Vivanti.

C. Runge. — *Theorie und Praxis der Reihen*. (Sammlung Schubert N. XXXII), p. 288. Leipzig, Goeschen, 1904 [Prezzo del volume leg. Mk. 7].

L'importanza teorica e pratica dei processi infiniti (specialmente delle serie) è andata ognora crescendo, nel mentre che essi si trasformavano da metodi di approssimazione od artifici di ricerca, in strumenti analitici, rigorosi e potenti, che devono essere a tutti famigliari. Il raccogliere in un' opera speciale *tutto* ciò ad essi si riferisce, e cioè tanto quelle parti (come l'inversione delle serie) di regola trascurate dai moderni, quanto quelle (metodi meccanici) di consueto lasciate in disparte dai teorici presentasi quindi come impresa lodevolissima. Per tradurre in atto quell' idea nessuno poteva trovarsi in condizioni migliori del Runge, il quale su quell'argomento scrisse lavori che i competenti altamente apprezzarono. Senza diffonderci in una lunga analisi dell'opera in discorso, eccone il piano:

Introduzione. § 1. Il concetto di approssimazione.

I. *Serie a termini costanti*. § 7. Convergenza delle serie infinite. — § 3. Convergenza assoluta o non. — § 45. Operazioni sulle serie. — § 6. Serie a termini complessi.

II. *Serie di funzioni*. § 7. Convergenza equabile. — § 8. Le serie di potenze. — § 9. Proprietà delle serie di potenze. — § 10. Inver-

Digitized by Google

sione delle serie. — § 11. Integrazione e differenziazione delle serie. — § 12. L'integrale di Cauchy. — § 13. Applicazione alle serie di potenze e ad altre serie. — § 14. Funzioni sferiche di una variabile. — § 15. Interpolazione,

III. *Le serie di Fourier.* § 16. Calcolo dei coefficienti. — § 17. Decomposizione di funzioni empiriche. — § 18. L'apparecchio di Michelson e Stratton. — § 19. Esempi di decomposizioni analitiche. — § 20. Errore relativo all' ultimo valore approssimato. — § 21. Considerazioni di convergenza. — § 22. Il periodo infinito.

IV. *Prodotti infiniti.* § 23. Condizioni di convergenza. — § 24. Sviluppo in prodotti infiniti del seno. — § 25. Le serie θ.

V. *Sviluppi in serie di funzioni a più di due variabili.* — § 26. Serie di potenze con più di due variabili. § 27. Altri sviluppi in serie. § 28. Funzioni sferiche.

G. L.

J. A. SERRET. — *Lehrbuch der Differential-und Integralrechnung. Mit Genehmigung des Verf. deutsch bearbeitet von* A. HARNACK. *2. durchgesehene Auflage herausgegeben von* G. BOHLMANN *und* E. ZERMELO. III. Bd.: *Differentialgleichungen und Variationsrechung.*. Mit 33 in den Text gedruckten Figuren, 8.°, p. XII + 475, Leipzig, Teubner, 1904. [Prezzo Mk. 10].

È l' ultimo volume di un' opera di cui già segnalammo (v. *Bollettino* T. III, 1900. p. 29), il piano e le ottime qualità: i temi in esso svolti, essendo assai delicati e di singolare importanza, il lavoro di revisione dovette essere condotto con grande cura ed ha necessitato una perizia ancora maggiore di quella richiesta riguardo ai volumi precedenti. Tale revisione venne così bene condotta che si può affermare essere in conseguenza assicurato un considerevole prolungamento alla benefica influenza che da circa mezzo secolo esercita il trattato del Serret.

G. L.

R. SCHÜSSLER. — *Orthogonale Axonometrie. Ein Lehrbuch zum Selbststudium.* Mit 29 Figurentafeln in besonderem Hefte. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1904, 8.° pag. VIII + 170. [Prezzo del vol. leg. Mk. 7].

Sotto il nome di « Assonometria ortogonale » si intendono due cose, fra loro intimamente connesse, ma in fatto distinte; cioè: I. il complesso delle costruzioni mediante le quali si può delineare la projezione ortogonale su di un piano di essa figura di cui ogni punto è individuato

Digitized by Google

col mezzo delle sue coordinate rispetto a tre assi cartesiani ortogonali; II. quale metodo per rappresentare univocamente le figure dello spazio, consistente nel projettare ortogonalmente sul quadro, non solo le figure stesse, ma anche una delle loro projezioni sopra i piani coordinati. L'una cosa e l'altra sono contemplate nell'opera del Prof. Schüsslez; ma mentre la prima è solo fugacemente considerata, l'altra è svolta in tutti i suoi aspetti e variamente applicata. L'A. si è accinto a scrivere il suo trattato dopo di avere presa notizia di tutti i lavori *tedeschi* sull'argomento (specialmente alle ben note memorie del Pelz egli ha largamente attinto); ma se egli avesse spinto il suo sguardo ancora più oltre, l'opera sua ne sarebbe stata notevolmente avvantaggiata. A dimostrare la verità di tale asserto basti rilevare che, per trattare le questioni relative a rette e primi fra loro perpendicolari, egli espone metodi praticamente utili, ma teoricamente artificiosi, mentre in Italia da tempo venne a ciò vantaggiosamente applicato la stessa procedura usata nel metodo della projezione centrale, come può vedersi da un opuscolo pubblicato a Pavia or sono dodici anni dal Prof. Berzolari. Opuscolo in cui inoltre sono svolti alcuni temi (cambiamento del quadro, cambiamento del piano di riferimento, rotazioni delle figure obbiettive) che sarebbe stato opportuno d'includere in un trattato del genere di quello che annunciamo. Ma se, quindi, tale trattato sembra presentare qualche lacuna nella parte teorica, è per converso di considerevole ampiezza nelle applicazioni, giacchè contempla i poliedri, il circolo e le coniche, i coni ed i cilindri, la sfera e la superficie rotonde, e riguardo a tali figure tratta non solo le questioni esclusivamente teoriche, ma anche i principali problemi relativi alle ombre. Aumenta la chiarezza e cresce il valore del libro la ricca collezione di belle figure che vi è annessa.

G. L.

F. Schilling. — *Ueber die Anwendungen der darstellenden Geometrie, insbesonden über die Photogrammetrie.* Mit 151 Figuren und 4 Doppeltafeln. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1904, 8.° gr., pag. VI + 198. [Prezzo del vol. leg. Mk. 5].

Da qualche anno, specialmente per opera del Prof. F. Klein, l'indirizzo esclusivamente teorico che aveva in Germania l'insegnamento universitario della matematica venne surrogato con altro in cui alle applicazioni venne accordato il posto che esse meritano sia grazie al loro intrinseco valore sia pel benefico influsso che esercitano sullo sviluppo della scienza pura. In tale indirizzo vennero appunto concepite le (tre) interessantissime conferenze che annunciamo, fatte agl'insegnanti di matematica convenuti nel 1904 a Gottinga, per seguirvi il

Digitized by Google

« Ferienkurs » pasquale. In esse della Geometria descrittiva (disciplina che venne solo recentemente iscritta fra quelle regolarmente insegnate in tutte le università tedesche) si trovano fatte conoscere le applicazioni ai seguenti soggetti: I Stereometria, geometria projettiva ed analitica, II Cinematica, III Meccanica (in particolare statica grafica), IV Fisica matematica, V Analisi ed algebra, VI Geodesia, VII Astronomia e geografia matematica, VIII Cristallografia, IX Architettura, X Teoria delle macchine, XI Scienza dell'ingegnere, XII Fisiologia e psicologia, XIII Arte; da ultimo sono esposti con sufficiente ampiezza, i concetti fondamentali e le applicazioni più cospicue della fotogrommetria. Il Prof. Schilling, disponendo di un tempo limitato, per ogni argomento traccia soltanto le linee generali, ma cita le opere ove essi trovansi completamente sviluppato; di più con opportuni i numerosi modelli rese più impressionante ed attrattivo il suo dire. La Casa Teubner, facendo del volume annunciati un vero capolavoro dell'arte tipo-litografica, si adoperò efficacemente a che la parola scritta esercitasse sul pubblico dei lettori una benefica influenza paragonabile a quella che la viva voce operò certamente su chi ebbe la fortuna di ascoltarla.

G. L.

E. Bortolotti. — *Lezioni sul calcolo degli infinitesimi* date nella R. Università di Modena, raccolte dal Dott. Armando Barbieri. — Modena, Società tipografica, 1905, 8°, p. VII+63 [Prezzo L. 3].

In queste lezioni è esposta, con molto maggior larghezza che ordinariamente non si faccia nei corsi di Calcolo, la teoria degli infinitesimi, che l'autore da qualche tempo ha fatto oggetto di studio accurato. Dopo avere stabilito che cosa si intende per *limite superiore e inferiore d'indeterminazione di una funzione* $f(x)$ *in un punto* x_0:

$$\lim_{x=x_0} \sup f(x), \quad \lim_{x=x_0} \inf f(x),$$

e per *punto d'infinito* e *d'infinitesimo* d'una funzione, l'autore dà la solita definizione d'*ordine d'infinito* e *d'infinitesimo* e dimostra i teoremi fondamentali che vi si riferiscono. Però, per potere studiare la rapidità relativa di crescenza e di evanescenza di un maggior numero di funzioni, conviene estendere i concetti di eguaglianza e diseguaglianza degli ordini, ciò che egli fa nel modo seguente: L'ordine di f è *eguale* a quello di φ, *superiore* o *inferiore* ad esso, quando, posto $\frac{f}{\varphi} = e^{r(x)}$, si ha rispettivamente:

$$\lim_{x=x_0} \varepsilon(x) = 0, \quad \lim_{x=x_0} \inf \varepsilon(x) > 0, \quad \lim_{x=x_0} \sup \varepsilon(x) < 0.$$

Digitized by Google

Conviene inoltre prendere invece di $x - x_0$ altre funzioni, diverse secondo i casi, come infinitesimi principali: e qui l'autore estende i noti teoremi al caso in cui l'infinitesimo principale sia una funzione qualunque.

G. VIVANTI.

O. STOLZ, J. A. GMEINER. — *Einleitung in die Funktionentheorie.* 2, umgearbeitete und vermehrte Auflage der von den Verfassern in der « Theoretischen Arithmetik » nicht berücksichtigten Abschnitte der « Vorlesungen über allgemeine Arithmetik » von O. Stolz. I. Teil. Leipzig, Teubner, 1904, 8°, p. VI+242 [Prezzo del vol. leg. Mk. 6].

Gli autori, sciogliendo una promessa fatta in occasione della pubblicazione della *Theoretische Arithmetik* (V. *Boll.* 1901 p. 42, 1903 p. 59), ci presentano un rifacimento di quei capitoli delle classiche lezioni di Stolz che non trovarono posto nella citata opera. Il volume che abbiamo dinanzi consta di 5 capitoli, e cioè: 1. Funzioni d'una variabile reale; 2. Funzioni di più variabili reali; 3. Funzioni di variabili complesse; 4. Funzioni razionali intere; 5. Serie di potenze. Le modificazioni non sono molte nè molto importanti; notiamo gli elementi della teoria degli aggregati, qualche nozione sulle *fonctions bornées* di Jordan, alcuni teoremi sulle funzioni continue di più variabili, il calcolo del resto d'una serie di potenze di due variabili. Una numerosa serie d'esercizi (circa 100 in tutto) si trova alla fine dei vari capitoli.

G. VIVANTI

H. DE VRIES. — *Die Lehre der Zentralprojektion im vierdimensionalen Raume.* Mit 25 Figuren, Leipzig, Goeschen 1905, 8.° gr. p. 78 [Prezzo Mk. 3].

Come lo indica il titolo, scopo del presente opuscolo è la metodica esposizione della rappresentazione dello spazio a quattro dimensioni sullo spazio ordinario col mezzo dela proiezione centrale. L'A. suppone noti ne' suoi lettori soltanto i primi elementi dell' ipergeometria — nella misura in cui ad es. si trovano insegnati in un noto volume dello Prof. Schoute (*Bollettino*, T. VI 1903, p. 39) — onde può fare assegnamento sopra di un pubblico abbastanza numeroso.

Dal modo in cui egli si esprime sembra emergere che a quella generalizzazione di un conosciutissimo metodo di geometria descriveva egli sia giunto con le sole sue forze e che egli ignori come altri lo abbia preceduto. Riuscirebbe altrimenti inesplicabile avere egli taciuto

Digitized by Google

che tale generalizzazione è stata immaginata e svolta dal Prof. Veronese, circa un quarto di secolo fa, quando egli era studente del Prof. Fiedler al Politecnico di Zurigo.

G. L.

R. DEDEKIND. — *Stetigkeit und irrationale Zahlen.* 3., unveränderte Auflage. Braunschweig, 1905, 8.° p. 24 [Prezzo Mk. 1].

La giusta celebrità conseguita di questo opuscolo è tale che qualunque parola di raccomandazione da parte nostra riuscirebbe superfluo e potrebbe venire giudicata inopportuna.

G. L.

H. MANDART. — *Cours de géometrie analytique à deux dimensions (sections coniques).* Namur. Wesmael-Charlier, 1904, 8.° p. VIII+574 [Prezzo fr. 10].

Questa nuova esposizione della geometria analitica del piano (con riguardo speciale alle sezioni coniche) si distingue da altre di più antica data per la considerevole ampiezza della trama su cui è tessuta e per l'ampio uso saviamente fattovi dei concetti fondamentali della geometria moderna (projettiva) e dei metodi propri dell'algebra moderna (teoria degl'invarianti). Per ciò essa si accosta ai ben noti trattati del Salmon e del d'Ovidio, mentre, da un certo punto di vista potrebbe assimilarsi ad un manuale di geometria analitica e projettiva. A porgere un'idea adeguata di quanto contiene questo nuovo volume che il Belgio lancia sul mercato librario, serva il seguente indice degli argomenti svolti:

Prima Parte: *Punto, retta, circolo.* I Coordinate cartesiane. II Linea di primo ordine. III Punteggiate e fasci. IV Circolo.

Seconda Parte: *Linee di secondo grado.* I Principali proprietà delle linee di secondo ordine. II L'ellisse. III L'iperbola. IV. La parabola. V Coordinate polari. VI Sezioni piane del cono.

Terza Parte: *Teoria generale delle coniche.* I Omotetia e similitudine. II Poli e Polari. III Coordinate tangenziali. IV Teoremi di Chasles, Newton, Mac Laurin, Pascal, Steiner e Brianchon. V Punti e tangenti comuni a due coniche. VI Fasci di coniche. VII Varie specie di fasci. VIII Schiere. IX Coniche bitangenti a due coniche date. X Polari reciproche.

Quarta Parte: *Coordinate trilineari omogenee.* I Punto e retta. II Coniche. III Trasformazione delle coordinate. IV Poli e polari. V. Polari reciproche. VI Fasci di coniche. VI. Reti di coniche.

L'abbondanza e lodevole distribuzione della materia, la chiarezza

Digitized by Google

dello stile e l'eleganza dei calcoli assicurano all'opera didattica del Prof. Mandart ottima accoglienza da parte di professori e studenti e rendono desiderabile che egli si accinga a redigere un analogo volume sulla geometria analitica dello spazio (con speciale riguardo alle quadriche).

G. L.

PROGRAMMI E RIASSUNTI DI CORSI UNIVERSITARI

UNIVERSITÀ DI PAVIA

CORSI DI ANALISI SUPERIORE

tenuti negli anni 1903-04 e 1904-05

dal Prof. ERNESTO PASCAL

(Anno 1903-04).

1. — **Teoria delle forme differenziali di ordine superiore**

(*In questa prima parte del Corso sono andato esponendo i principali risultati da me ottenuti in una serie di Memorie e Note che ho pubblicato negli ultimi tempi su questo argomento nei Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, in quelli del R. Istituto Lombardo, nei Comptes Rendus dell'Accademia di Parigi, ecc.*).

1. — Forma del differenziale r^{mo} di una funzione di più variabili dipendenti — Introduzione delle espressioni δ, e identità ad esse relative — Applicazione di una trasformazione infinitesima al δ — Studio sulla formazione della derivata di una funzione composta — Introduzione di un nuovo simbolo relativo a tale formazione e studio delle sue proprietà e delle identità cui soddisfa.

2. — Forme differenziali; la particolarità che si introduce nei coefficienti è una particolarità invariantiva — Introduzione di una forma lineare alle derivate parziali — Invariante simultaneo Λ di una siffatta forma e di una forma differenziale.

3. — La costruzione dei simboli a carattere invariantivo — Simboli secondarii e loro proprietà — Loro trasformazione — Simboli principali e loro trasformazione — Simboli relativi alle forme differenziali di 1.° ordine e r^{mo} grado — Estensione dei simboli di Christoffel — Matrici a caratteristica invariante.

Digitized by Google

4. — I covarianti evidenti connessi alla forma data — Covarianti costruiti mediante i simboli secondarii — Loro relazioni — Covarianti simultanei di una forma differenziale e di una alle derivate parziali — Caso in cui questa sia di 1.° ordine — Covarianti C — Covarianti formati coi simboli principali — Covariante L — Casi particolari del 1.° e del 2.° ordine.

5. — Applicazione di una trasformazione infinitesima ad una forma differenziale — Ulteriore riduzione della formola relativa — Il risultato è una forma differenziale del medesimo ordine e *tipo* della data — Introduzione di un altro simbolo e studio delle relazioni cui soddisfa — Trasformazioni infinitesime che lasciano inalterata la forma o la equazione differenziale — Equazioni a derivate parziali cui debbono soddisfare l'invariante Λ e i covarianti C, perchè esista una trasformazione infinitesima della predetta specie — Caso del 2.° ordine — Caso in cui le C e Λ sono zero.

6. — Forme differenziali omogenee — Caso in cui queste sono differenziali esatti — Forme differenziali ad una sola variabile — Loro rapporto con una notevole formola di ricorrenza per le derivate logaritmiche di ordine superiore.

7. — Completa integrabilità di una equazione ai differenziali totali — Applicazione alle forme differenziali ad una sola variabile e a coefficienti costanti tutti eguali — Discussione delle varie estensioni che possono darsi alla definizione della completa integrabilità per un sistema di equazioni di ordine r. Trasformazioni infinitesime del sistema aggiunto — Condizione necessaria perchè il sistema sia completamente integrabile è che ammetta le trasformazioni infinitesime del proprio sistema aggiunto.

8. — Problema di Pfaff e problemi di riduzioni — Cenni sul problema classico per il caso del primo ordine — Caso del secondo ordine — Trattazione col metodo delle trasformazioni infinitesime — Trattazione col metodo diretto — La possibilità della soluzione del problema dipende dall'esistenza di certe trasformazioni infinitesime che lasciano invariata la forma data.

II. — Teoria delle trasformazioni di contatto.

(È noto l'intimo legame che esiste fra il problema di Pfaff e la teoria delle trasformazioni di contatto; ecco perchè ho creduto assai opportuno l'esporre questa importante teoria nella seconda parte del Corso).

9. — Trasformazioni puntuali ampliate — Elemento del piano — Idea di trasformazione di contatto del piano — Sua determinazione —

Digitized by Google

Esempii varii — Il prodotto di due trasformazioni di contatto, e l'inversa di una di esse, sono anche trasformazioni di contatto — Varietà M_1 del piano e loro relazione colle trasformazioni di contatto — In una varietà M_1 ogni elemento è *congiunto* col suo seguente.

10. — Per una trasformazione di contatto una curva si trasforma nell'inviluppo di tutte quelle in cui si trasformano i suoi punti — Esempi: Trasformazioni per polari reciproche, per pedali, per curve parallele (Trasf. di dilatazione).

11. — Funzioni in involuzione e relazioni cui devono soddisfare i secondi membri delle formole di una trasformazione di contatto — Trasformazioni di contatto che conservano inalterata la direzione di ciascun elemento — Trasformazioni di contatto che trasformano linee parallele in linee parallele — Trasformazioni permutabili fra loro — Trasformazioni di contatto permutabili con tutte le traslazioni — Introduzione delle coordinate polari — Le dilatazioni sono le uniche trasformazioni di contatto permutabili con tutte le traslazioni e con tutte le rotazioni.

12. — Le trasformazioni di contatto possono ricavarsi da una serie di trasformazioni puntuali — Teorema relativo ed esempio delle curve cicloidali.

13. — Applicazione della teoria delle trasformazioni di contatto alle equazioni differenziali di 1.° e 2.° ordine — Ogni equazione differenziale di 2.° ordine è trasformabile in ogni altra per mezzo di trasformazioni di contatto — Trasformazioni di contatto che trasformano in sè stessa una equazione differenziale di 2.° ordine, e in particolare., che trasformano tutte le rette del piano ancora in rette — Una equazione differenziale di 3.° ordine non può., con trasformazioni di contatto, trasformarsi in ogni altra.

14. — Non esistono trasformazioni di osculo nel piano, che non siano trasformazioni di contatto ampliate (Teerema di Bäcklund). — Altra dimostrazione diretta.

15. — Concetto di trasformazione infinitesima di contatto e di gruppo — Funzione caratteristica, e simbolo di una trasformazione infinitesima di contatto — Interpretazione geometrica della funzione caratteristica — Equazioni differenziali di 1.° ordine che ammettono una nota trasformazione infinitesima di contatto; resta allora conosciuto un fattore integrante.

16. — Invarianti differenziali di una trasformazione infinitesima di contatto e loro determinazione.

17. — Le trasformazioni di contatto in un numero qualunque di variabili — Relazioni fra le funzioni che rappresentano i secondi membri delle formole di trasformazione — Trasformazioni infinitesime di contatto in un numero qualunque di variabili.

Digitized by Google

18. — Considerazioni generali sui gruppi di trasformazioni di contatto — Struttura, isomorfismo, transitività, imprimitività.

(Anno 1904-05)

Sulla teoria delle equazioni a derivate parziali di 1.° e di 2.° ordine

I. — *Equazioni di 1.° ordine*

1. — Integrale completo — integrale singolare — Integrale generale — Qualunque integrale è compreso in questi — Come da un integrale completo si possa passare a qualunque altro — Esempi — Si può sempre trasformare l'equazione in modo che la funzione incognita non vi entri se non per mezzo delle sue derivate — Due metodi di trasformazione — Esempii.

2. — Da una relazione contenente una funzione arbitraria φ *di* n funzioni delle $x_1, \ldots x_n$, eliminando tale funzione φ si ha un'equazione a derivate parziali *lineare omogenea* — Un'equazione lineare non omogenea può sempre ridursi omogenea — L'integrazione di una equazione lineare si riduce a quella di un sistema di equazioni differenziali (Teorema di *Lagrange*) — Esempi — Curve caratteristiche — Si può sempre determinare la superficie integrale che passi per una curva data (Problema di *Cauchy*) — Simbolo X di una trasformazione infinitesima; sue proprietà; sua trasformazione; formola di *Jacobi* — Cenno sulle traiettorie di un gruppo di trasformazioni ad un sol parametro e loro relazione col simbolo X.

3. — Sistemi di r equazioni differenziali parziali lineari omogenee di 1.° ordine — Formazione dei sistemi *completi (Clebsch)* — Teoremi su questi — Sistemi Jacobiani — Un sistema completo ammette $n - r$ integrali distinti, e reciprocamente — Teorema di *Mayer* (1872) e metodo ridotto d'integrazione — Esempii varii — Tentativo di *Jacobi* per semplificare la integrazione dei sistemi completi.

4. — Il problema dei sistemi completi si collega con quello dei sistemi di equazioni pfaffiane completamente integrabili — Invariante A di una equazione pfaffiana e di una trasformazione infinitesima — Sistema aggiunto e sue proprietà.

5. — Equazioni a derivate parziali non lineari — Metodo di *Lagrange* e *Charpit* per due variabili (1772-1785) — Esempii — Metodo delle caratteristiche di *Cauchy* per due variabili (1819) — Risoluzione del problema di *Cauchy*, cioè trovare una superficie integrale che passi per una curva data — Carattristichee - Se una superficie integrale contiene un elemento di una caratteristica contiene tutta la caratteristica corrispondente — Estensione ad n variabili.

Digitized by Google

6. — Metodo di *Pfaff* (1815) — Nozioni varie sui pfaffiani — Costruzione delle equazioni differenziali che bisogna risolvere per risolvere in generale il problema di *Pfaff* — Classe di una forma pfaffiana, e sua riduzione a forma canonica — Equivalenza di forme pfaffiane o di equazioni pfaffiane. — Esempio di una riduzione di *Pfaff* — Notevole perfezionamento arrecato da *Jacobi* alla costruzione dei sistemi ausiliarii di equazioni differenziali ordinarie — Esempii.

7. — Applicazione del metodo di *Pfaff-Jacobi* all' integrazione delle equazioni a derivate parziali di 1.° ordine — Primo metodo di *Jacobi* (1837) — Legami coi risultati che avea già ottenuto in senso inverso *Hamilton* (1836) per l' integrazione delle equazioni differenziali ordinarie della dinamica — Formola di *Jacobi* con cui la funzione incognita resta rappresentata da una quadratura — Esempi varii.

8. — Esposizione di un altro tentativo fatto da *Jacobi* nel 1827, e completato da *Boltzmann* (1875).

9. — Secondo metodo di *Jacobi* come estensione del metodo di *Lagrange* e *Charpit* — Era abbozzato da *Jacobi* sin dal 1836 ma fu pubblicato nel 1862 — Parentesi di *Poisson* e formole varie che vi si riferiscono — Teorema detto di *Liouville* — Teorema di *Poisson*, e ricerca delle equazioni intermedie — Il sistema di equazioni lineari cui soddisfa il primo membro di un' equazione intermedia è completo (Teorema di *Mayer*) — Applicazione di questo teorema per semplificare il 2.° metodo di *Jacobi* — Metodo di *Mayer* (1872).

10. — Sistemi di equazioni a derivate parziali di 1.° ordine — Ricerca di *Bour* — Integrale completo di un tal sistema — Sistemi in involuzione — Esempii.

11. — Teorema di *Lie* sui sistemi in involuzione (1872) — È in sostanza l' estensione del teorema di *Mayer* sui sistemi lineari completi — Applicazione al secondo metodo di *Jacobi* — Metodo di *Lie*.

II. — *Equazioni di 2.° ordine.*

12. — Enunciato del problema di *Cauchy* — Esistenza dell' integrale di *Cauchy* — Integrale generale e singolare — Qualche considerazione sull' origine di un' equazione a derivate parziali di 2.° ordine — Estendendo ciascuna delle due forme dell' integrale generale nel caso del 1.° ordine, si hanno tipi *speciali* di equazioni di 2.° ordine. — Esempii varii — Non può estendersi la considerazione che si fa pel primo ordine per dedurre l' integrale generale da uno completo.

13. — Teoria delle caratteristiche per le equazioni a derivate parziali di 2.° ordine — Applicazione all' equazione di *Monge-Ampère*, che possiede caratteristiche di 1.° ordine. Ognuna di queste appar-

Digitized by Google

tiene a ∞^1 caratteristiche di 2.° ordine. — Caratteristiche di ordine superiore — Il numero delle equazioni differenziali di queste è sempre superiore di due unità a quello delle variabili. — Una caratteristica di 2.° ordine appartiene a ∞ superficie integrali — Due caratteristiche di 2.° ordine con un elemento comune appartengono ad una sola superficie integrale. — Per le equazioni di *Monge-Ampére*, sussiste un analogo teorema ma per le caratteristiche di 1.° ordine — Classe di equazioni più generale di quelle di *Monge-Ampère* — Discussioni relative — Definizione generale delle caratteristiche di 1.° ordine — Discussione del problema di *Cauchy* nel caso in cui la curva data soddisfi l'equazione $Rdy^2 - Sdxdy + Tdx^2 = o$.

11. — Gli integrali intermedii di 1.° ordine — Equazioni a cui devono soddisfare — Come si risolve il problema di *Cauchy*, conosciuto un integrale intermedio con una funzione arbitraria ovvero con due costanti arbitrarie — Rapporto fra gl'integrali intermedii di 1.° ordine e le combinazioni integrabili delle equazioni pfaffiane delle caratteristiche di 1.° ordine. — Metodo di *Monge* (1784). — Se esistono due combinazioni integrabili si ha un integrale intermedio con una funzione arbitraria — Applicazione all'equazione di *Monge-Ampère* — Teoria generale di tale equazione — Due integrali intermedii appartenenti a caratteristiche di due sistemi diversi sono sempre in involuzione — Se un sistema di caratteristiche di 1.° ordine ammette tre combinazioni integrabili, i due sistemi coincidono, e in tal caso si trova con eliminazioni un integrale con tre costanti da cui può dedursi l'integrale generale. Se ciascuno dei due sistemi di caratteristiche di 1.° ordine ha due combinazioni integrabili, la ricerca dell'integrale generale si riduce a quadrature. Tutte le equazioni di tale specie si riducono ad $s = o$ con trasformazioni di contatto (teorema di *Lie* e *Darboux*) — Se invece uno dei sistemi ha due combinazioni integrabili e l'altro uno, la ricerca dell'integrale generale si riduce alla soluzione di una equazione differenziale ordinaria di 1.° ordine.

15. — Metodo di *Ampère* (1820) — Esso può applicarsi nei casi in cui ciascuno dei due sistemi di caratteristiche di 1.° ordine abbia una sola combinazione integrabile, nei quali casi il metodo di *Monge* non può applicarsi — Esempio classico della equazione della superficie ad area minima — Caso in cui uno dei sistemi ha due combinazioni integrabili — Esempio.

16. — Metodo di *Darboux* (1870) — Si cercano le combinazioni integrabili delle equazioni differenziali dei sistemi di caratteristiche di ordine superiore al primo — Discussione dei varii casi che possono presentarsi — Cenno sui sistemi in involuzione di equazioni di ordine superiore — Concetto generale di sistemi in involuzione e discussioni relative — Esempii — Cenno sul metodo di *König* (1884) come esten-

Digitized by Google

sione diretta del metodo di *Lagrange-Charpit* — Risultati cui si giunge, e loro paragone con quelli dedotti dal metodo di *Darboux*.

17. — Metodo per la risoluzione di equazioni speciali — Metodo di *Laplace* per la equazione omonima (1773) — Trasformazione di *Laplace* — Paragone coi risultati che si ottengono applicando il metodo di *Darboux* all'equazione di *Laplace* — Cenno su altre ricerche relative alle equazioni a derivate parziali con più di due variabili indipendenti — Discussione generale sulle ricerche che resta ancora a fare in una così importante teoria.

NOTIZIE

Guido Hauck, che fra il generale compianto dei colleghi e dei discepoli, morì a Berlino il 25 Gennajo 1905, era nato a Heilbronn il 26 Dicembre 1845. Negli anni 1851-1857 studiò nella città natale e poi a Stuttgart, ove la sua famiglia erasi trasferita. Gli obblighi militari, che egli adempì durante le guerre del 1866 e del 1870, resero accidentati i suoi studi universitari e ne ritardarono il compimento, sicchè soltanto nel 1876 gli fu possibile di conseguire a Tubinga la laurea dottorale. Ma fin dal 1871 aveva ottenuto in questa città un posto nell'insegnamento e lo tenne sei anni, cioè fin quando alla morte del Polhke venne chiamato a succedergli nella « Bauakademie ». Ed allorchè questa venne fusa con la « Gewerbeakademie », per formare il grande Politecnico di Berlino, egli divenne una delle colonne del nuovo istituto.

I lavori scientifici dell'Hauck sono ben noti a tutti coloro che si occuparono di geometria descrittiva. Chi poi desidera conoscere le sue idee estetiche e formarsi un concetto esatto di tutto quanto egli compì come professore e come rettore, va suggerita la lettura dell'affettuosa e profonda commemorazione fattane dal Prof. Lampe il 17 Maggio 1905 e pubblicata (con l'elenco completo delle pubblicazioni dell'estinto) nel XIV volume del *Jahresbericht der deutschen Mathem. Vereinigung*.

***

A. Comte e la storia delle scienze è il titolo di una memoria postuma di Paolo Tannery, pubblicata per cura del fratello Giulio nella *Revue générale des sciences pures et appliquées* (15 Maggio 1905); essa era destinata a far parte del *Discours sur l'histoire générale des sciences*, progettato dall'illustre estinto, e contiene una critica

Digitized by Google

della celebre « formola dei tre stadi » del Comte ed un cenno della direzione in cui procedere per renderla più prossima al vero.

***

Biblioteca Scolastica. — E. Lebon, *Géométrie descriptive et géométrie cotée conforme aux Programes du 31 Mai 1902 pour l'enseignement secondaire.* Classes de mathématique A et B. Paris, Delain. 1905, 8.° p. VI×175, [Cf. *Bollettino*, T. IV, 1901, p. 86 e T. VII, p. 1904, p. 31].

K. Schwering. — *Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik für höhere Lehr-Anstalten.* III. Lehrgang. 2. verb. Auflage (Freiburg im Br. 1904).

C. Burali-Forti. — *Aritmetica e geometria per la quarta classe elementare. Programmi approvati con R. Decreto 29 Gennaio 1905)* (Torino, Paravia).

H. Schubert. — *Beispiel-Sammlung zur Arithmetik und Algebra*, Sammlung Göschen N. 46, 3. Auflage 1905 (Prezzo del vol. leg. 80 Pf).

I. Junker. — *Repertorium und Aufgabensammlung zur Differentialrechnung.* Sammlung Goschen N. 146. 2. Aufl. 1905 [Prezzo del vol. leg. Mk 0.80].

***

Concorsi a premi. — L'Università di Cambridge conferirà nel 1906 il Premio Adam (4500 scellini) alla migliore trattazione del seguente tema: « Le disuguaglianze del moto lunare che sono riconducibili ad un'azione diretta dei pianeti ». Scadenza 16 Dicembre 1906.

La Società olandese delle scienze conferirà il premio di 150 fiorini a chi risolverà il problema seguente: « Nel caso di una curvatura costante la determinazione del volume del tetraedro nello spazio ellittico a tre dimensioni si riduce a quella del tetraedro iperspaziale dello spazio a quattro dimensioni (estensione della trigonometria sferica). Si domanda di raccogliere la letteratura relativa a quest'ultimo volume ed apportarvi qualche contributo importante (vedi la memoria dello Schläfli in *Nieuw Archiv von Wiskunde*, 2.ª Ser., vol. 6.° II parte. p. 199).

La società scientifica di Bruxelles propone il seguente tema di concorso: « Determinare i caratteri distintivi dei valori massimi e minimi di una funzione di tre variabili $f(x, y, z)$, nel caso in cui lo sviluppo di $f(a+h, b+k, c+l)-f(a, b, c)$ può annullarsi senza mutare di segno ».

Digitized by Google

***

I SOGNI E L'INSPIRAZIONE MATEMATICA. — Sotto questo titolo E. Maillet ha pubblicato nel *Bulletin de la Société philomatique 1905* i risultati che diede un'inchiesta da lui promossa mediante due questioni inserite nel numero di Ottobre 1902 dell'*Intermédiaire des mathématiciens*. Benchè le conclusioni di tale inchiesta si possono riassumere dicendo che anche nel campo matematico « chi dorme non piglia pesci », pure il lavoro del Maillet forma un capitolo di psicologia, interessante pei cultori delle scienze esatte.

***

PER GLI AMATORI DI RITRATTI. — La « Open Court publising Company » di Chicago ha di recente pubblicato *A portfolio of portraits of eminents mathematiciens*, in 4.°, contenente le effigi di Talete, Pitagora, Euclide, Archimede, Leonardo Pisano, Cardano, Vieta, Fermat, Napier, Descartes, Leibniz e Newton. Ogni ritratto è accompagnato da un breve cenno intorno alla vita dell'originale, dovuto al Prof. D. E. Smith. Questo non si fa mallevadore dell'assomiglianza dei ritratti dei primi quattro fra gli enumerati pensatori, ma seppe con accorgimento industriarsi nel soddisfare il desiderio di coloro che aspirano ad averne una collezione di ritratti contenente anche i patriarchi delle scienze esatte; e così tolse Talete da una antica incisione riproducente un busto di quel saggio, Pitagora dall'affresco di Raffaello rappresentante la scuola di Atene, Euclide da una antica medaglia posseduta da Cristina di Svezia e Archimede da un quadro del Barabino. Questa pubblicazione è in vendita al prezzo di 5 o 3 dollari (a seconda della qualità della carta) e se il pubblico fara ad essa liete accoglienze verrà continuata.

***

PUBBLICAZIONI RECENTI SULLA STORIA DELLE MATEMATICHE. — E. Wiedemann, *Studien zur Geschichte Galileis* (Sitzungsber. der phys. med. Ges. in Erlangen, T. 36, 1904).

A. Favaro, *Bonaventara Cavalieri e la quadratura della spirale.* (Rend. del R. Ist. Lomb., 1905).

F. Amodeo, *Gl'istituti d'istruzione e scientifici in Napoli intorno al 1800* (Atti dell'Acc. Pontaniana, T. XXXIV, 1905) [Sono ivi narrate le vicissitudini subite, durante il periodo che prende nome da Nicola Fergola, da l'Università, i Licei, e le Accademie militare e di Marina, seguono poi notizie intorno a gli studi privati, le biblio-

Digitized by Google

teche, l'officina geografica e l'osservatorio astronomico; a quest'ultimo è connesso un uomo di fama mondiale, Giuseppe Piazzi].

***

Un'opera in corso di pubblicazione è quella del Prof. Bustelli che annunciammo col Vol. VII, 1904, p. 63. Ne vennero pubblicati i primi due fascicoli (I *Prologomeni:* II *Appunti di logica della matematica*). Di essa (che porta il titolo *Elementi di filosofia della matematica nei riguardi didasalici,* Roma, Milano, Soc. ed. « Dante Alighieri ») ci occuperemo appena sarà compiuta.

***

Galileo ed il concetto moderno d'infinito è il titolo d'una lettura fatta dal D.r E. Kasner il 27 Febbraio 1904 dinanzi alla Società matematica americana (v. *Bulletin of the Am. math. Soc.*, T. XI, 1905); scopo di essa è di fare risalire a Galileo la definizione di « infinito », secondo la quale esso è caratterizzato dall'essere un insieme tale che una sua parte può essere posta in corrispondenza univoca col tratto.

***

Una bibliografia delle curve algebriche, comprendente circa 1400 scritti di 550 autori, venne pubblicata da Dr. H. Wieleitner in appendice al *Jahresbericht der k. humanistischen Gymnasiums zu Speyer* für das Schuljahr 1904-05. Frutto dei lavori preparatori ad una *Theorie der hoheren algebraischen* Kurven, destinata alla Sammlung Goschen, essa può tornare utile a tutti quelli che si interessano della teoria matematica forse più d'ogni altra coltivata al presente.

***

Una nuova collezione di modelli di matematica viene annunciata dalla Casa Teubner. In essa veranno riprodotti parte dei modelli costrutti sotto la direzione del Prof. H. Wiener e che vennero esposti a Heidelberg in occasione del III Congresso dei matematici; vennero preferiti i modelli utili all'insegnamento; ad illustrarli verrà pubblicata una serie di monografie.

Bestonzo Pietro, Gerente.

Genova - Tipografia R. Istituto Sordomuti - 1905.

Digitized by Google

ANNO VIII. OTTOBRE, NOVEMBRE E DICEMBRE 1905.

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA
E STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA DI

GINO LORIA

Editore: **Carlo Clausen, Hans Rinck** Succ. Torino — Del *Bollettino* si pubblicheranno ogni anno quattro fascicoli di almeno 32 pag. — Prezzo d'abbonamento annuo: Per l'interno L. 6, per l'estero Fr. 7.50. Numeri separati L. 2 caduno. Gli articoli da inserirsi si mandino al *Prof. G. Loria*, Università di Genova.

SOMMARIO

G. VACCA, *Sulla matematica degli antichi cinesi.*

Recensioni ed annunzi: LIEBMAN, *Nichteuklidische Geometrie* [G. L.]. — POINCARÉ, *Wissenschaft und Hypothese* [G. L.]. — POINCARE, *La valeur de la science* [G. L.]. — MEYER, *Integralrechnung* [G. Vivanti]. — JAHNKE, *Vektorenrechnung* [G. L.]. — DOLL u. NESTLE, *Praktische Geometrie* [G. L.]. — LINDELOF, *Calcul de résidus* [G. Vivanti]. — SCHUBERT, *Auslese.* I [G. L.]. — AMODEO, *Geometria proiettiva* [E. Ciani]. — *Verh. des III. intern. Mathem.-Kongresses* G. L.]. — PIZZETTI, *Geodesia* [A. Viterbi]. — MANSION, *Calcul des probabilités* [G. L.]. — BALL, *Mathematical Recreations* [G. L.].

Notizie: G. Salmon. — Mathem. und naturwiss. Berichte aus Ungarn. — II Congresso di filosofia. — Riproduzioni diplomatiche di classici.

SULLA MATEMATICA DEGLI ANTICHI CINESI

NOTA DI GIOVANNI VACCA

Un passo molto importante nella storia della matematica in Cina si trova nell'opera *Cheu-pi soan King* composta durante la dinastia dei *Cheu* (che comincia nel 1122 a. C.).

È stato commentato da *Chiao-Kiun-King* della dinastia degli *Han* (200 a. C. — 200 d. C.), ripubblicato nel VII secolo da *Chin-loan*, ed ulteriori elucidazioni furono date da *Li-chun-fung* della dinastia dei *Tang* (600-900).

Una copia di una edizione (del 1600?) si trova a Londra. (Cfr. *Catalogue of Chinese Printed Books of the British Museum*, by R. K. Douglas, London 1877, p. 19).

Digitized by Google

Questo passo ha già avuto tre diverse traduzioni dall' originale cinese. La prima del P. Gaubil (1689-1759) si trova riprodotta nelle *Lettres édifiantes et curieuses* (Lyon, 1819, t. 14, p. 302. La seconda di Ed. Biot è pubblicata nel *Journal Asiatique*, 1841, s. 3, t. 11, p. 593-630. Infine la terza, dovuta ad Alexander Wylie pubblicata la prima volta a Shanghai nel 1852 e tradotta in tedesco da Biernatzki (*Journ. für die r. u. ang. Math.*, t. 52, 1856, p. 65).

Queste tre traduzioni discordano tra loro in varî punti. Io ho avuto occasione di poterle confrontare col testo cinese quale è riprodotto e commentato nell' opera *Tien yuen leih li tsiuen shu*, in 51 libri, pubblicata da *Seu fa* nel 1682, e posseduta in un bell' esemplare dall' illustre prof. Carlo Puini. Alla sua cortesia debbo pure in gran parte la nuova traduzione seguente.

***

« Una volta Cheu-Kung (fratello minore di Wu-wang, fondatore « della dinastia dei Cheu, il quale regnò dal 1122 al 1115 a. C.) « chiese a Shang-Kao: Io ho saputo che tu sei un buon matematico, « dimmi dunque una cosa. Gli antichi asseriscono che Pao-hi stabilì « la regola dei cicli astronomici (quello di 19 anni e quello di 72), « e la circonferenza del cielo. Ora al cielo non si sale con la scala, « nè col braccio si misura la terra; io perciò ti tomando: donde cavò « egli i suoi calcoli?

« Shang-Kao rispose: La regola di siffatti calcoli riposa su due « figure, quella del circolo e quella del quadrato. Il circolo si ricava « dal quadrato, e il quadrato dal rettangolo; ed il rettangolo proviene « dalle operazioni aritmetiche (letteralmente: $9 \times 9 = 81$). Poichè, « considerato il rettangolo, se esso ha per base 3 e per altezza 4, « avrà per diagonale 5.

« Infatti facendo un quadrato (con quattro rettangoli siffatti), con- « siderando le metà esterne di ogni rettangolo, e facendovi intorno « una scacchiera, si ottengono i numeri 3, 4, 5 e due rettangoli: tutto il « rimanente è 25. Si ha così la costruzione del rettangolo. Il mezzo « di cui Yu [il fondatore della dinastia degli Hia, che regnò dal 2205 « al 2197 a. C.] si servì per sistemare le tasse e i tributi, ha la sua « origine in questo modo di calcolo ».

[Il commentatore cinese aggiunge che il grande Yu stabilì i tributi secondo i paesi, per mezzo del triangolo rivelò la morfologia del suolo, la forma dei campi, e la posizione dei pozzi, e stabilì un sistema di misure e di pesi basato sui numeri.

Nello Chu-King, uno dei cinque libri canonici della Cina, si trovano altre notizie interessanti sull' opera di Yu].

Digitized by Google

« Cheu Kung domandò ancora: È grande ciò che tu dici della scienza « dal calcolo! Ma parlami ancora dei modi di usare la squadra « (angolo retto).

« Shang Kao rispose: Colla squadra a livello (?) si misurano le oriz- « zontali, colla squadra obliqua, si misurano le altezze, colla squadra « coricata le distanze, colla squadra condotta intorno si fa il cerchio, « colle squadre congiunte si fa il quadrato ».

Il testo cinese a questo punto diventa oscuro, seguono allusioni a conoscenze astronomiche, per mezzo di frasi tecniche che non si possono tradurre senza aver prima ricostruito le nozioni a cui si riferiscono.

Val meglio arrestarci qui, anzichè scrivere frasi italiane prive di senso.

A schiarimento del testo occorre aggiungere che il passo è accompagnato da una figura formata da una scacchiera quadrata di 7×7 caselle, dalla quale sono tolti tutto intorno quattro mezzi rettangoli (di lati 3,4) in modo da lasciare nell'interno un quadrato di area 25 e perciò di lato 5. Dalla considerazione di questa figura appare chiaro ciò che l'A. cinese voleva provare, cioè il teorema che un rettangolo di base 3 e di altezza 4, ha 5 per ipotenusa.

La dimostrazione aritmetico-geometrica è contenuta, mi sembra, nel periodo: « Infatti, facendo un quadrato con quattro rettangoli, etc. ».

Questo periodo è stato così tradotto dal P. Gaubil:

« Si on sépare le *Ku* en deux, on fait le *Keou* large de 3, et un « *Keou* long de 4. Une ligne *King* joint les deux cotés *Keou, Kou* « fait les angles, le *King* est de 5, c'est le *tsi-ku* total des *Ku* ».

E dal Biot:

« En dehors de la figure rectangulaire prenez la moitié, ce sera « un *Kuu*. Englobez ou reunissez et ensemble calculez, vous obtenez « parfaitement 3,4,5. Les deux *Kuu* ensemble font une longueur de « 25. C'est ce qu'on appelle la somme de *Kuu* ».

E dal Wylie (seguendo il Biernatzki):

« Macht man mit den äussern Seiten ein Viereck, so ist dessen « Hälfte dem Dreieck an Flächeninhalt gleich. Legt man alle Sei- « ten zusammen, so ist das Facit gleich der Summe von 3, 4, und 5. « Das Quadrat der Hypothenuse, gleich 25, ist gleich den Quadraten « der beiden kurzen Seiten des Dreiecks ».

Queste versioni discordi non permettevano di vedere nel testo cinese la semplicissima dimostrazione che esso racchiude, non già del teorema di Pitagora, come pensava il Wylie, ma di un suo inverso, avente per scopo la costruzione di un angolo retto. Ancora oggi questo metodo, consistente nel tracciare un angolo retto sul terreno per

Digitized by Google

mezzo di una cordicella a triangolo, di lati 3,4,5, è applicato in alcune circostanze.

La seconda parte del passo sopra riportato accenna in modo chiaro alla conoscenza dei più semplici problemi interessanti la geometria pratica, che oggi si insegnano nei trattati di trigonometria.

La frase « colla squadra condotta intorno si fa il cerchio » sembra alludere alla nozione che ogni angolo inscritto nel semicerchio è retto. Però la frase cinese è troppo concisa per poterlo supporre con certezza.

È difficile stabilire con esattezza a quale epoca risalga questo testo cinese. Non mi sembra però affatto inverosimile il supporlo anteriore ovvero contemporaneo a Pitagora. In ogni caso è certa l'indipendenza e l'originalità dell'opera cinese dalla scienza greca. Forse essa ha rapporti coll'antichissima civiltà babilonese, nella quale i calcoli aritmetici applicati alla geometria ed all'astronomia erano molto sviluppati (cfr. F. K. Ginzel, *Die Astronomischen Kenntnisse der Babylonier und ihre kulturhistorische Bedeutung* in *Beitr. zur alten Geschichte.* Leipzig, Weicher, 1904).

***

Gli storici della matematica hanno studiato lungamente questo testo del *Cheu-pi*, e ne hanno tratto diverse conclusioni a seconda della traduzione della quale si sono serviti. M. Cantor nella seconda edizione della sua classica opera (t. I p. 637) si riferisce alla versione del Biot. La figura 94, che egli ricostruisce senza averla veduta, coincide esattamente con quella originale cinese.

Recentemente H. G. Zeuthen in una interessante comunicazione relativa al teor. di Pitagora (*Congrès de Philosophie,* 11e session tenue á Genève du 4 au 8 Sept. 1904, rapports etc. publiés par le Dr. E. Claparède, Genève, 1905, p. 847) ha intuito che gli antichi cinesi dovevano possedere una dimostrazione relativa alla figura ricostruita dal Cantor. È curioso osservare che essa era racchiusa nel testo stesso da lui analizzato.

Prima di terminare, desidero rettificare alcune affermazioni, troppo recise riguardanti le cognizioni degli antichi cinesi, contenute in due opere recentemente apparse in veste italiana, e cioè nella *Storia della Geometria* di R. Klimpert, tradotta da P. Fantasia, Bari, 1901 e nel primo volume del *Breve compendio di storia delle Matematiche* di W. W. Rouse Ball, trad. da G. Puliti, Bologna 1903.

Nel libro del Ball (pag. 9-10) si riferisce l'opinione di L. A. Sedillot che gli antichi cinesi « pure possedendo una abilità considere- « vole nelle arti applicate erano ignari delle scienze sulle quali quelle « arti si fondano ». La conclusione mi pare arrischiata.

Digitized by Google

Se i cinesi sono giunti a risultati che noi crediamo dipendenti dalla nostra scienza, senza di essa, bisogna dedurne che la nostra opinione è errata, e che questo popolo deve aver avuto altri *fondamenti*, almeno in parte equivalenti ai nostri. Poichè mi sembra del tutto incomprensibile che possa esistere un popolo irragionevole, che ci raggiunga in molti punti per la precisione e lo sviluppo delle arti e si contenti di spiegazioni puerili ed assurde.

Il Sèdillot ha ripetuto più volte questa conclusione che egli espresse anche più recisamente in una sua lettera a Boncompagni, del 1868: « nous avons étudié les travaux [des missionnaires Parennin, Mailla, Gaubil (Souciet), Amiot] avec le plus grand soin, et nous sommes arrivés avec Delambre à cette conclusion, que les Chinois n'ont jamais étudié les mathématiques » (p. 423 del 2.° volume della sua: *Histoire générale des Arabes*, 2ᵉ édition, Paris, 1877).

Il Klimpert (p. 26-28) manifesta la stessa opinione. Dopo aver riportato dal Cantor il passo del *Cheu-pi* aggiunge che questo scritto « che per la sua puerilità ed insipienza non lascia alcun dubbio sulla « sua autenticita, porge un giusto concetto dello stato della matema- « tica in Cina, circa 3000 anni fa ».

L'affermazione, che le cognizioni possedute dai Cinesi di 3000 anni fa *non bastano* per essere chiamate matematica, ma costituiscono soltanto un gruppo informe di regole empiriche, non mi pare sostenibile.

Qui io credo che una distinzione debba realmente segnarsi. Un popolo, come gli Australiani o i Guarany dell'America meridionale, che conta fino a 4, non ha *aritmetica*. Analogamente è dubbio se le prime linee informi dei popoli preistorici, che ricordano appena oggetti e forme note, siano *pittura*.

A me sembra che si possa dire che la matematica comincia soltanto allorchè appaiono alcune relazioni di mutua dipendenza di proposizioni e di regole, ed allorchè tali relazioni cominciano ad essere *ammirate*. Il fatto estetico mi sembra fondamentale nella matematica, non soltanto per guidarci nei primi principî del suo divenire, ma anche per porre in giusta luce il complicato edificio che oggi possediamo.

Così non può dubitarsi che le Antiche tavole dei quadrati e dei cubi dei numeri scoperte una cinquantina d'anni fa a Senkareh da Loftus (si veda: G. Rawlinson, *The five great monarchies of the anc. Eastern World*, 2ª edit. London, 1871, p. 103), e quelle ancor più antiche scoperte recentemente da H. V. Hilprecht (*Explorations in Bible Land*. Edinburgh, 1903, p. 530) nel tempio di Nippur, le quali offrono una serie completa di tavole di moltiplicazione dei numeri da 1 a 1350 almeno, e risalgono, pare al 2300 a. c., non ab-

Digitized by Google

biano destato in coloro che le scrivevano o le leggevano dei sentimenti estetici.

Ora mi sembra di aver mostrato che nel *Cheu-pi* è contenuta una *dimostrazione matematica*, ed è espressa la più viva ammirazione per la sua scoperta.

Firenze, Luglio 1905.

RECENSIONI ED ANNUNZI

H. LIEBMANN. — *Nichteuklidische Geometrie.* Sammlung Schubert XLIX. Mit. 22 Figuren, p. VIII + 248. Leipzig. Göschen, 1905 [Prezzo del vol. leg. Mk. 6.50].

Chi intendeva porsi al corrente dei fondamenti della geometria non-euclidea aveva sino ad ora proprio disposizione le notissime opere del Frischauf e del Killing, nonchè il II vol. delle *Vorlesungen über Geometrie von A. Clebsch* redatte dal Lindemann. Ma, da un lato la pubblicazione (dovuta in gran parte alle cure dei Prof.ri Engel e Stäckel) di ricerche inedite del Bolyai e del Gauss e la traduzione in tedesco di scritti del Lobacefskij, i quali erano rimasti finora insensibili alla generalità dei matematici, e da altro lato la comparsa di nuovi fondamentali lavori sull'argomento (basti ricordare quello fortunatissimo dell'Hilbert) resero quegli scritti non più rispondenti alle attuali condizioni della nostra scienza. Ben venga dunque il volumetto con cui il Prof. Liebmann (di cui è notorio l'interesse per le dottrine di cui è parola: cfr. il presente volume del *Bollettino*, p. 31).) si è proposto di colmare la conseguente lacuna che esisteva nella letteratura matematica. Il volume che egli ci presenta non è (basta per comprenderlo tener conto delle sue modeste proporzioni!) un trattato completo sulla materia, ma una ben ordinata esposizione elementare di alcuni fra i principali capitoli di essa; quali siano emerge dal seguente elenco di di titoli:

I. — Il postulato delle parallele e le pseudo-dimostrazioni di esso.
II. — Rappresentazione della geometria del piano iperbolico sulla geometria dei circoli del piano euclideo.
III. — Geometria sintetica dello spazio iperbolico.
IV. — La trigonometria dello spazio iperbolico.
V. — Calcolo di lunghezze, superficie e volumi mediante integrali.
VI. — Geometria analitica dello spazio iperbolico.
VII. — La geometria sferico-ellittica.
VIII. — La meccanica non-euclidea.

Digitized by Google

Il libro è intelligibile a chiunque abbia compiuto il nostro primo biennio universitario. Le numerose ed esatte citazioni che racchiude lo rendono adatto a servire di guida anche chi vuole avventurarsi all' infuori dei confini che l' autore vi ha posti; notiamo però che esse mostrano nell' A. una conoscenza non perfetta della letteratura sull' argomento, chè altrimenti non si spiegherebbe perchè egli, nel trattare delle proprietà focali delle coniche in geometria non-euclidea, non abbia ricordati, assieme ai lavori dello Story, quelli del Prof. d'Ovidio (Atti della R. Acc. di Torino T. 26, 1891). G. L.

H. POINCARÉ. — *Wissenschaft und Hypothese. Autorisierte deutsche Ausgabe mit erläuternden Anmerkungen von* F. und L. LINDEMANN. Leipzig, Teubner, 1905. 8.°, p. XVI+342. [Prezzo del vol. legato Mk. 4.80].

« Pochi investigatori [osserva il Prof. Lindemann nell' esordio alla versione dell'opera *La science et l'hypothèse* (Paris, Flammarion, 1902) compiuto dalla sua signora] coltivarono con altrettanto successo la matematica pura ed applicata quanto l' autore dell' opera presente. Nessuno quindi era più di lui designato a trattare ad un tempo dell'essenza del ragionamento matematico e del valore della fisica matematica dal punto di vista della teoria della conoscenza. Benchè in tale campo le opinioni dipendono, in parte almeno, dalle condizioni e dalle esperienze, pure gli sviluppi in cui si addentra l'autore ottennero ovunque la più seria e completa considerazione, tanto più perchè egli si è sforzato di riuscire intelligibile anche in una cerchia più vasta di quella comprendente i soli matematici e vi è riuscito completamente servendosi di esempi splendidamente svolti.

« Le considerazioni esposte si aggirano sopra le basi dell'aritmetica, le nozioni fondamentali della geometria, le ipotesi e le definizioni della meccanica e di tutta la fisica matematica, tanto nella loro forma classica quanto nel loro sviluppo più recente..... ».

Per dare un' idea dal punto di vista da cui si pone l' autore basta citare alcune proposizioni caratteristiche.

« Gli assiomi della geometria non sono nè giudizii sintetici *a priori* nè fatti sperimentali; ma determinazioni o definizioni travestite suggerite dalla convenienza. La geometria non è una scienza sperimentale; tuttavia l'esperienza ci guida nello scegliere gli assiomi; essa non ci abilita a riconoscere quale geometria sia la vera, ma soltanto quale è la più comoda. Sarebbe tanto sragionevole indagare se le proposizioni geometriche fondamentali siano vere o false, come sarebbe sragionevole chiedere se il sistema metrico sia vero o falso.....

I principii della meccanica sono convenzioni e definizioni mascherate.

Digitized by Google

Essi derivano da leggi sperimentali; tali leggi sono proposte come principii a cui la nostra intelligenza attribuisce validità assoluta.....

Le matematiche non hanno per fine la spiegazione della vera natura delle cose. Loro unico scopo e di collegare fra loro le leggi fisiche, rilevateci dall' esperienza, ma che non possiamo enunciare senza l' ajuto della matematica.

Quello che la scienza è in grado di raggiungere non è già la conoscenza delle cose, ma soltanto le relazioni fra le cose; all' infuori di siffatte relazioni non esiste alcuna realtà riconoscibile ».

L' opera del Poincaré venne giudicata e lungamente discussa da personalità eminenti nel momento in cui apparve in francese, onde ci dispensiamo dal distenderci in una minuta analisi critica di essa; basti il dire che, mentre è probabile che in qualche profano essa generi un senso di deplorevole sconforto, obbligherà per converso gli scienziati a riflessioni salutari; inoltre contiene tale somma di osservazioni acute, nuove e geniali che bene fu inspirato il Lindemann a diffonderne la conoscenza fra i suoi connazionali. Va inoltre notato che con le dotte e importanti note (abbraccianti un centinaio di pagine) di cui egli l' ha corredata tolse quel po' di vago che avevano certe asserzioni del Poincaré e così ne accrebbe di gran lunga il valore; alcuna di tali note, trattando con metodi matematici le questioni sui principii della goemetria, completano quello che trovasi esposto nel T. II della *Vorlesungen über Geometrie von* A. Clebsch; onde il volume che annunziamo merita di venire studiato anche da coloro che non s' interessano alle indagini di filosofia matematica, ma solo a quelle in cui intervengono formole e figure. G. L.

H. Poincaré. — *La valeur de la science,* 8.°, p. 278. Paris, Flammarion, 1905 [Prezzo fr. 3.50].

L' originalità delle più caratteristiche fra le tesi sostenute nell' opera discorsa nell' articolo precedente avendo dato luogo ad interpretazioni non pienamente conformi al vero, l' illustre Autore, fu indotto a riprendere l' indagine critica dei fondamenti delle discipline fisiche e matematiche. Ebbe origine così un complesso d' investigazioni, delle quali egli fece conoscere alcuni risultati parziali col mezzo di articoli dt riviste od in conferenza d' occasione, e che egli espone metodicamente nel nuovo volume che ora annunziamo. Mentre nella sua più antica pubblicazione il Poincaré si è occupato dei temi seguenti: I *Il numero e la grandezza*, II *Lo spazio*, III *La forza*, IV *La natura*, nella presente ha trattato successivamente di: I *Le scienze matematiche*, II *Le scienze fisiche*, III *Il valore obbiettivo della scienza.* E poichè questi titoli sono incapaci di dare un adeguato concetto delle

Digitized by Google

materie svolte, aggiungeremo che nella I Parte il nostro A. tratta « dell'intuizione e della logica in matematica », « della misura del tempo », « della nozione di spazio » e di « lo spazio e le sue tre dimensioni »; nella II invece egli espone delle idee, che in parte fece conoscere in una lettura fatta a St. Louis, sopra « l'analisi e la fisica », « l'astronomia », « la storia, la crisi attuale e l'avvenire della fisica matematica »; infine nella III, dopo di essersi domandato « se la scienza sia artificiale » studia i rapporti tra la scienza e la realtà.

Un'opera del genere di quelle del Poincarè non si può riassumere, essa va letta per intero, meditata lungamente e poi eventualmente discussa. Limitiamoci pertanto a rilevare in essa il I Cap. della II Parte, nel quale gli aiuti reciproci che si prestano l'analisi matematica e la fisica sono esposti con una profondità, larghezza e lucidità meravigliose. Notiamo eziandio che, quantunque l'Autore si mostri sempre coerente a sè stesso, pure l'intonazione generale del suo nuovo volume è meno scettica di quella dell'antico; sicchè spesso, in luogo della voce d'un iconoclasta, si ode un inno alla scienza moderna, che malgrado l'artificiosità delle promesse, da cui muove, può essere ben gloriosa delle proprie conquiste; tale intenzione è specialmente sensibile nei passi in cui il Poincarè combatte le opinioni del Le Roy, un filosofo matematico che si spinse, forse un po' troppo avanti, nella via del dubbio dal Poincarè stesso aperta e percorsa.

Auguriamo che il pubblico degli scienziati, accogliendo il II volume del Poincarè con plauso non meno unanime e sincero di quello con cui salutò il I, manifesterà il voto che il celebre scienziato prosegua a coltivare un campo di studio in cui egli può mietere ancora numerosi e splendidi allori.

G. L.

W. F. Meyer. -- *Differential- und Integralrechnung.* Band II: Integralrechnung. - Leipzig, Goschen, 1905. XVI + 414 p., 8.° (Sammlung Schubert XI).

Questo secondo volume si divide come il primo in due sezioni, di cui una contiene i fondamenti del calcolo integrale e le applicazioni, l'altra la parte sistematica del calcolo integrale.

Nella 1.ª sezione l'A., partendo dal concetto generale dell'inversione d'un'operazione, considera il problema inverso della derivazione, e stabilisce che ogni funzione $F(x)$, per cui $F'(x) = 0$, è una costante, deducendone poi che, se l'*equazione differenziale:*

$$y' = f(x) \tag{1}$$

Digitized by Google

ha una *soluzione*, ne ha infinite, differenti tra loro per costanti additive (§ 1). Le equazioni differenziali possono avere forme molto diverse dalla (1); tali sono p. es. le:

$$y'' = \mp y,$$

le cui soluzioni sono funzioni trigonometriche od esponenziali. La e^x può anche riguardarsi come soluzione dell'equazione di 1.° ordine:

$$y' = y;$$

da quest'equazione, e dall'altra:

$$y' = \frac{1}{x}$$

che se ne deduce per la funzione inversa si ottiene (il *teorema d'addizione* per le funzioni esponenziali e logaritmiche § 2). L'equazione:

$$J'(x) = f(x), \tag{2}$$

dove $y = f(x)$ si suppone essere l'equazione d'una curva piana, ha per soluzione l'area $J(x)$ compresa tra un'ordinata fissa arbitraria, un'ordinata variabile, l'arco di curva intercetto, e la proiezione di esso sull'asse delle x. La ricerca delle aree viene svolta, prima per la parabola (§ 3), poi in generale (§ 4), e conduce alla conclusione dell'*esistenza* di una soluzione dell'equazione (2), e alla introduzione del concetto di integrale definito e indefinito. Dopo ciò l'autore sviluppa il teorema della media e le regole d'integrazione per sostituzione e per parti (§ 5), dalla quale ultima si deduce una nuova dimostrazione della formola di Taylor (§ 6).

Le nozioni esposte nei primi paragrafi sono sufficienti per quadrare e rettificare molte curve piane (§§ 7, 8, 11, 12), per trovare le aree delle superficie dei corpi rotondi (§ 13), e i volumi di questi corpi (§ 9) e di quelli di cui è nota l'area d'ogni sezione parallela ad un piano determinato (§ 10), e per trattare alcuni problemi inversi, in cui si cercano le figure geometriche aventi date proprietà (§ 14). Lo studio della tangente, della normale e delle grandezze geometriche che da esse derivano (§§ 15, 16, 17) conduce a dare l'interpretazione geometrica dell'equazione differenziale $\varphi(x, y, y') = 0$, come quello della concavità e convessità e della curvatura (§§ 18, 19, 20, 21) permette di determinare il significato geometrico dell'equazione $\varphi(x, y, y', y'') = 0$. Molte equazioni, sì dell'una che dell'altra specie, risultanti da problemi geometrici, vengono integrate. Segue la teoria della curvatura delle linee gobbe (§ 22) e quella degli elementi geometrici delle superficie: piano tangente, normale (§ 23), curvatura (§ 24).

La 2.ª sezione parte dai cosidetti integrali elementari (§ 25), che l'A. divide in 5 gruppi, a seconda della natura della funzione da inte-

Digitized by Google

grarsi: potenze, funzioni razionali, funzioni irrazionali, funzioni trigonometriche, funzioni esponenziali. I paragrafi che seguono studiano successivamente gli integrali meno semplici appartenenti a questi stessi gruppi, e cioè il § 26 si riferisce al 1.°, i §§ 29, 30 e 31 al 2.°, i §§ 28, 32 al 3.°, il § 27 al 4.°, il § 34 al 5.°. Il § 33 estende il concetto d'integrale alle funzioni dipendenti da costanti complesse ed alle serie di potenze d'una variabile complessa. Esaurito così lo studio degli integrali esprimibili con funzioni elementari, l'A. passa a trattare degli integrali ellittici e delle loro funzioni inverse (§§ 35, 36). Gli ultimi paragrafi sono dedicati alla derivazione d'un integrale rispetto ad un parametro (§ 37), alla integrazione per serie (§ 38), ai differenziali totali (§ 39) ed agli integrali doppi e loro applicazioni geometriche (§ 40).

Nel presente volume abbiamo trovato con piacere molto attenuate le imperfezioni che dovemmo notare nel volume precedente (V. *Boll.* 1902, p. 23). Anzitutto l'autore ha reso le sue considerazioni in generale rigorose, limitando il suo studio alle funzioni alle quali è applicabile il teorema della media di Cauchy; diciamo « in generale », perchè v'è qualche punto che difetta di rigore, tale p. es. il paragrafo relativo alla derivazione sotto il segno. Poi la teoria è esposta più sistematicamente che nel primo volume, sicchè chi legge può farsi un concetto abbastanza esatto di ciò che sia il calcolo integrale. Sarebbe stato però desiderabile che l'autore, togliendo occasione dalle molte equazioni differenziali che gli si presentano, avesse fatto conoscere i principali tipi di equazioni differenziali facilmente integrabili, ciò che avrebbe elevato gli esempi svolti all'importanza di modelli per lo studio di altre equazioni analoghe.

G. Vivanti.

E. Jahnke. — *Vorlesungen über die Vektorenrechnung. Mit Anwendungen auf Geometrie Mechanik und mathematische Physik.* Mit 32 Figuren im Text. Leipzig, Teubner, 1905. 8.°, pag. XII+235. [Prezzo del vol. leg. Mk. 5.60].

Due sono gli indirizzi che seguirono i cultori e gli espositori dell'analisi vettoriale; uno di essi fa capo alle concezioni dell'Hamilton, l'altro a quelle del Grassmann; il primo si mostrò specialmente adatto alla trattazione delle questioni di fisica matematica, mentre l'altro si rivelò capace di servire altrettanto bene alla trattazione dei problemi di geometria. Sia per tal maggiore ampiezza della sfera d'influenza, sia per un sentimento di venerazione verso un illustre connazionale, gli è l'indirizzo *tedesco* che il Prof. Jahnke ha seguito nelle lezioni che egli tenne durante cinque semestri al Politecnico di Berlino e di cui

Digitized by Google

annunziano la pubblicazione. Va però subito notato che, se egli si dichiara ed è discepolo e seguace del Grassmann, ha studiato e si è assimiliato anche i concetti introdotti nella scienza da Hamilton e continuatori, onde il suo libro è atto a fornire un'idea completa dello stato attuale del calcolo vettoriale e delle applicazioni che esso ricevette alla geometria, alla meccanica ed alla fisica. Anzi il considerevole spazio consacrato alle applicazioni, rendendo più attraente l'esposizione ed evidente l'utilità di quel metodo di geometria analitica, può crescere il numero degli amici che esso conta attualmente; al raggiungimento di tale intento contribuirà senza dubbio anche lo stile brillante dell'A., nonchè l'eleganza dei calcoli da lui effettuati.

L'opera si divide in due parti: la I dedicata ai vettori nel piano; la II ai vettori nello spazio; quella comprende sei capitoli e dodici l'altra; dopo di averla letta non solo si conoscono tutti i concetti originali di Grassmann, ma si ha notizia dell'uso che egli ne fece alla generazione di curve e superficie algebriche e che poi ne fu fatto alle geometria del triangolo e del tetraedro, alla geometria della retta, ecc. ecc. Ond'è che anche a quei lettori italiani, i quali appresero quei concetti in note pubblicazioni del Prof. Peano, l'opera del Jahnke, riuscirà di notevole giovamento: valga il presente cenno a segnalarla e raccomandarla loro.

G. L.

M. Doll u. P. Nestle. *Lehrbuch der praktischen Geometrie.* 2. Aufl. Leipzig und Berlin, 1905, 8.°, pag. VII + 164. [Prezzo del volume legato Mk. 3.20].

La I edizione di questo trattarello del Dottor Doll risale al 1880; manifestatosi il bisogno di una II, venne affidato l'incarico al Professor Nestle di curarla ed egli vi fece aggiunte così importanti che ben a ragione egli condivide oggi la paternità dell'intera opera. La quale va segnalata, non soltanto ai pratici, ma anche a quei professori delle scuole secondarie che, seguendo il parere di egregi pedagogisti, intendono ravvivare l'insegnamento puramente teorico della geometria con applicazioni veramente utili.

G. L.

E. Lindelöf. — *Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions.* Paris, Gauthier-Villars, 1905. p. VII + 143, 8°.

È impossibile fare un'analisi minuta di questo interessante volumetto senza entrare in lunghi calcoli. Noi pertanto ci limiteremo ad un brevissimo riassunto.

Digitized by Google

Il Cap. I contiene i principî della teoria delle funzioni secondo Cauchy, con numerosi richiami storici. Il calcolo dei residui viene applicato nel Cap. II a varie questioni, quali lo sviluppo delle funzioni implicite, la teoria delle funzioni meromorfe ed il calcolo di certi integrali definitivi: nel Cap. III alla dimostrazione di varie formole sommatorie note. Da queste formole vengono dedotte nel Cap. IV certe espressioni relative alla funzione gamma, alla funzione $\zeta(s)$ di Riemann e ad una generalizzazione di quest' ultima, $\zeta(s, n)$. Infine nel Cap. V viene applicata la teoria dei residui al problema del prolungamento analitico ed allo studio asintotico delle funzioni definite da una serie di potenze.

G. Vivanti.

H. Schubert. — *Auslese aus meiner Unterrichts- und Vorlesungspraxis*. I. Band. Mit 17 Figuren. Leipzig, Göschen, 1905, 8°, p. 239 [Prezzo del vol. leg. Mk. 4].

Il Prof. Schubert, novello Giano bifronte, è noto nel mondo degli studiosi sotto due aspetti differentissimi. I cultori della geometria salutano in lui il creatore dei più potenti metodi numerativi, di quei metodi che, specialmente in Italia, vennero applicati felicemente su larga scala. D' altronde le numerose sue opere didattiche, le più recenti delle quali sono note ai nostri lettori (v. *Bollettino*, T. VII, p. 82, VIII, p. 94), lo resero popolarissimo tra professori e studenti delle scuole secondarie tedesche. Orbene nell' elegante volumetto che oggi annunziamo, parla l' insegnante, il quale, dopo trentacinque anni di « Schulpraxis » e ventotto di « Vorlesungspraxis » ha giudicato opportuno di diffondere mediante la stampa la conoscenza dei metodi da lui immaginati per trattare alcune questioni *complementari* di algebra e di geometria.

Dei dieci articoli costituenti il volume in discorso, il I risolve in modo soddisfacente l' importante questione didattica di escogitare un metodo per costruire una tavola di logaritmi decimali, il quale sia intelligibile ed usabile anche da un studente liceale. Nel II è esposta la costruzione del poligono di 17 lati e nel III (da riguardarsi siccome una continuazione del precedente) sono stabilite le più essenziali proprietà delle equazioni binomie. Il IV risolve il problema di trovare il numero delle immagini prodotte da un punto luminoso posto davanti a *due* specchi piani formanti fra di loro un dato angolo (notisi che il problrema analogo per *tre* o *più* specchi non venne ancora risolto). Il V concerne la cubatura degli obelischi. Nell' VIII vengono indicate due vie per giungere al numero delle costanti da cui dipende un poliedro; tali vie conducono a risultati di forme differenti; identi-

Digitized by Google

ficandoli si perviene al teorema di Descartes-Eulero. Il IX è una introduzione alla geometria moderna (birapporto, projettività, polarità rispetto al circolo) e l'ultimo un compendio della geometria dei cerchi e delle sfere. — Finalmente gli articoli VI e VII sono la riproduzione di due note pubblicate già nella *Naturwissenschaftliche Wochenschrift* e concernenti una il sistema di misure assoluto in uso presso i fisici moderni e l'altra il pendolo semplice.

La varietà degli argomenti trattati, l'eleganza dei calcoli e la semplicità dei ragionamenti usati dall'illustre autore assicurano ottimo successo al volume testè discorso e renderanno desiderato il volume seguente: che questo non sarà inferiore al primo, ci sembra sia già da ora accertato dal saggio *(Die Ganzzahligkeit in der algebraischen Geometrie)* testè pubblicato in occasione della Riunione dei filologhi e professori tedeschi, tenuta ad Amburgo nell'autunno 1905.

G. L.

F. Amodeo. — *Lezioni di geometria proiettiva dettate nella R. Università di Napoli.* 8.° gr., p. XIV+456. Napoli, L. Pierro, 1905 [Prezzo L. 12].

L'opera del prof. Amodeo si compone principalmente di due parti di cui la prima è dedicata alle forme geometriche di prim'ordine, e la seconda a quelle di second'ordine ad una dimensione. Le due parti sono precedute da un capitolo d'introduzione destinato agli enti e principi fondamentali della geometria proiettiva. Questo capitolo comincia con un primo gruppo di cinque postulati in guisa da individuare le forme geometriche fondamentali. Gli altri postulati che occorrono allo intero svolgimento del trattato, sono introdotti dall'A. a a mano a mano che la loro presenza è necessaria e noi ne faremo volta per volta, speciale menzione.

Alla generazione delle forme geometriche fondamentali segue la introduzione degli elementi all'infinito e la definizione delle operazioni fondamentali della geometria proiettiva. Vengono poi le prime considerazioni sopra le figure geometriche costituite da un numero finito di punti. rette e piani in guisa da preparare il terreno alla dimostrazione del teorema fondamentale di Desargues sui triangoli prospettivi e alla legge di dualità. A questo punto l'A. introduce altri due postulati che permettono la trattazione delle proprietà essenziali dei gruppi armonici. Si arriva così alla definizione di proiettività fra forme di prima specie. L'A. adotta quella ben nota di Staudt e la fa seguire subito dall'altra inerente a forme di seconda e terza specie, dando anche le prime e più immediate conseguenze che derivano da tali definizioni.

Digitized by Google

Così si chiude la introduzione e si passa allo svolgimento della prima parte del libro che è suddivisa in tre capitoli. Per sviluppare il primo di essi è necessario presentare altri due postulati: uno di essi corrisponde in sostanza a quello che in Geometria elementare porta il nome di Archimede, l'altro è il postulato della continuità di Dedekind. Riesce allora possibile all'A. di stabilire un opportuno sistema di coordinate proiettive su di una forma di prima specie, mediante la cosidetta scala armonica, secondo un concetto geniale dovuto al compianto De-Paolis. Seguono via le considerazioni sulle corrispondenze ordinate e la dimostrazione del teorema fondamentale di Staudt sulla proiettività fra forme di prima specie. Le cognizioni già date dall'A. sulle coordinate proiettive gli permettono anche di stabilire l'equazione bilineare fra due parametri della proiettività suddetta. Il paragrafo che segue contiene delle considerazioni specialmente costruttive inerenti a forme di prima specie proiettiva dotate o no del medesimo sostegno. Come applicazione sono dimostrati i teoremi di Pascal e di Brianchon rendendoli indipendenti dal concetto di conica,, il che non ci sembra davvero troppo opportuno dal punto di vista della efficacia didattica: non volendo parlare di « coniche » i due enunciati si complicano e sembra che perdano ogni sapore d'eleganza e semplicità. Meglio sarebbe, a parer nostro, attendere a presentarli che la teoria delle coniche fosse almeno iniziata. Seguono alcune considerazioni sopra i prodotti di proiettività, sulle omografie cicliche e intorno a costruzioni di forme proiettive con speciale riguardo a omografie particolari dal punto di vista metrico (punteggiate simili, fasci uguali ecc.). Si arriva quindi alla involuzione, la quale è opportunamente definita come una particolare omografia ciclica: l'omografia ciclica di second'ordine. Un intero paragrafo è ad essa consacrato. Dal punto di vista analitico è a rilevarsi l'equazione della involuzione come caso particolare di quella già stabilita per un'omografia generica. Dal punta di vista costruttivo sono svolte le proprietà, usuali ma fondamentali, inerenti al numero delle coppie di elementi che individuano una involuzione, al riferimento di queste coppie ai punti di una retta, agli elementi doppi, alla classificazione delle involuzioni ecc. ecc. Il capitoto termina con un breve cenno sulle proiettività degeneri (che poteva invero essere tralasciato senza nocumento alcuno).

Il capitolo II della prima parte è dedicato agli elementi immaginari delle forme di prima specie. Il concetto di omografia trasformata mediante un'altra conduce in modo facile e chiaro alla involuzione che trasforma in sè stessa una data omografia, cioè alla cosidetta « involuzione unità ». L'argomento è importante e a torto viene qualche volta tralasciato nei corsi di geometria proiettiva. Esso fornisce un mezzo semplice per rappresentare in modo reale gli elementi uniti

Digitized by Google

di una qualunque omografia ellittica. Basta perciò ricorrere alla involuzione unita della omografia e ai due sensi della forma. L'A. si serve di questa e di altre rappresentazioni (che in sostanza si riducono a questa): così ad esempio si serve di una omografia ciclica al periodo tre, ovvero di tre, o quattro elementi reali succedentisi in un certo ordine, ecc. Mentre ogni omografia individua la propria involuzione unita, viceversa una data involuzione è unita per infinite omografie che formano un fascio. Vengono quindi a proposito le considerazioni dell'A. sui fasci di omografie e sulla loro rappresentazione analitica. Il concetto di punti ciclici del piano serve all'A. nel consueto modo per le applicazioni metriche che ne derivano, Nella parte rimanente di questo capitolo l'A. si spinge oltre, esponendo altri particolari sulle omografie unite, sui fasci di omografie, sulle omografie e involuzioni armoniche fra loro ecc. ecc. Ci sembra però che trattandosi di un corso elementare, questa parte rimanente (alla quale adesso abbiamo accennato) poteva limitarsi con maggiore utilità didattica, soltanto a quel poco che occorreva per il seguito.

Il capitolo III della prima parte è dedicato alle forme di 2.ª e 3.ª specie. Il primo paragrafo contiene le proprietà usuali più notevoli delle omografie. Bene spesso l'A. riunisce insieme le forme di 2.ª e 3.ª specie approffittando delle molte analogie che presenta la teoria della proiettività per le une e per le altre. Considera in modo particolare i casi delle omologie piane e solide e dà anche un cenno delle omografie assiali e biassiali. Nel secondo paragrafo l'A. introduce le coordinate proiettive degli elementi delle forme di 2.ª e 3.ª specie e rifà analiticamente, occupando così anche il paragrafo successivo, quanto è stato svolto per via sintetica nel paragrafo precedente. Seguono poi le omografie particolari sotto l'aspetto metrico: la similitudine, l'affinità, l'omotelia, l'uguaglianza, ecc. ecc., dopo di che si passa alle importanti considerazioni sulle omografie involutorie. Anche per le forme di 2ª specie (come già l'A. ha fatto per quelle di prima) l'involuzione è considerata come caso particolare delle omografie cicliche. Premesse quindi la definizione e qualche proposizione sulle omografie cicliche di ordine n, l'A. ne induce l'involuzione per il caso di $n = 2$. Se l'omografia è una collineazione si ha l'omologia armonica piana: se l'omografia è una correlazione si ha la polarità che è svolta qui in tutta la sua pienezza enunciando e dimostrando indipendentemente dalle coniche anche quei teoremi che per la natura loro sono più intimamente collegati a tali curve e ciò aggrava, a parer nostro, l'inconveniente già avvertito, a proposito dei teoremi di Pascal e Brianchon, di ritardare tanto ad esporre la teoria delle coniche. Le considerazioni metriche sulle polarità piane e sulla geometria della stella sono oggetto del paragrafo che segue. Il capitolo termina con brevi nozioni

Digitized by Google

intorno alla rappresentazione degli elementi immaginari delle forme di 2.ª specie. E la prima parte è finita.

La seconda parte è essenzialmente dedicata alle coniche e ai coni quadrici e, come la prima, è divisa in tre capitoli.

Il I comincia con la definizione di coniche e coni quadrici mediante forme proiettive di prima specie. Subito dopo si dà la generazione delle coniche come curve unite di polarità nel piano e dei coni come superficie unite di polarità nella stella. Segue la dimostrazione della identità proiettiva di tutte le coniche e di tutti i coni e per contrapposto la loro classificazione dal punto di vista metrico. Si presentano poi opportune le svariate costruzioni di coniche per punti e per tangenti mediante i teoremi di Pascal, di Brianchon, di Desargues. I corollari più notevoli di questi teoremi sono ottenuti, dall'A., dichiarando senz'altro un passaggio al limite: forse sarebbe bene evitare un tale passaggio considerando la facilità con la quale ciò può farsi e il vantaggio che se ne trae dal punto di vista del rigore e della chiarezza. Il cap'tolo termina con le questioni inerenti a contatti fra coniche con special riguardo alla costruzione del cerchio osculatore a una conica in un suo dato punto.

Il capitolo II della II parte è dedicato alle proprietà polari delle coniche e coni quadrici: così la teoria della polarità già svolta in modo indipendente dalle curve e coni di secondo grado è qui ripresa di bel nuovo tenendo conto e ponendo bene in evidenza il legame intimo e naturale che essa ha con tali curve e tali coni. Ne conseguono le proprietà metriche delle coniche inerenti al centro, diametri, assi, asintoti, fuochi, direttrici, ecc. Un paragrafo di questo capitolo è anche dedicato interamente alla costruzione di coniche individuate in parte da elementi immaginari: così ad esempio è indicata la costruzione di una conica data mediante tre punti reali e una coppia di punti immaginari coniugati, ovvero mediante un punto reale e due coppie di punti immaginari coniugati. L'ultimo paragrafo è destinato alla metrica dei coni e cilindri e contiene le proprietà più notevoli inerenti agli assi, piani di simmetria, rette focali, ecc.

Finalmente il capitolo II della II parte riguarda le proiettività per serie di punti o di tangenti di due coniche distinte, o sovrapposte e le conseguenti applicazioni ai problemi di 2.° grado. Un paragrafo è specialmente dedicato alla considerazione dei punti e tangenti comuni a due coniche e a qualche problema di 3.° grado relativo.

È così finita questa breve e sommaria esposizione di quanto il libro contiene. Alle poche osservazioni critiche fatte qua e là aggiungiamo adesso una di carattere generale. Il libro si annunzia come un trattato di Geometria proiettiva ma contiene, anche quelle nozioni di Geometria analitica che più sono consoni agli argomenti svolti dal punto di

Digitized by Google

vista proiettivo. Queste nozioni non sono molte nè sembrano didatticamente indispensabili: si poteva forse ometterle completamente senza diminuire il pregio del libro e senza invadere il campo della Geometria analitica. In compenso ci sarebbe parso più utile la trattazione sintetica di qualche altro argomento che nel libro è tralasciato: ad esempio la generazione delle quadriche mediante stelle reciproche, o la teoria delle quadriche rigate ecc. Qua e là qualche espressione può dar luogo ad equivoco: così ad esempio per l'A., il cono è un ente geometrico a una sola dimensione perchè deve intendersi come ente della stella che ha il centro nel vertice del cono. Chi non pensi a questa circostanza, il più delle volte sottintesa, e riguardi il cono come ente dello spazio punteggiato può ritenere inesatta la sua denominazione di ente ad una sola dimensione.

Le figure sono generalmente troppo piccole e quindi poco chiare. È evidente che furono disegnate nitidamente, con grande cura ma anche con la preoccupazione continua della cosidetta « tirannia dello spazio ». E appunto la loro piccolezza ha impedito di stamparle con quella chiarezza che si richiede.

Alla fine di ogni capitolo è proposta al lettore una serie di opportuni esercizi che servono ad illustrare le teorie svolte e anche a completarle. Ad es. i cosidetti teoremi di Ceva e Menelao che bene spesso fanno parte integrale della teoria dell'involuzione, sono stati posti dall'A. fra gli esercizi: e forse non a torto giacchè, mentre oggi da un lato la loro importanza è assai secondaria, dall'altro non si può ignorare questi teoremi che furono parte precipua della vecchia teoria delle transversali di un triangolo.

In tutto il libro si sente l'influenza che sull'A. esercitò l'opera anteriore del compianto Sannia, al cui trattato è ispirato il volume presente. Sul quale noi, a mo' di conclusione, esprimiamo il nostro modesto parere dichiarandolo un libro ben fatto e di indiscutibile utilità a chi muove i primi passi nello studio della geometria proiettiva, specialmente sotto la guida di un abile insegnante che tralasci o modifichi opportunamente ciò che può riuscire difficile e ostico in una prima lettura.

E. CIANI.

Verhandlungen des dritten internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904. Leipzig, Teubner, 1905, p. X + 756. 8.° [Prezzo del vol. leg. Mk. 18].

Grazie alla mirabile energia spiegata dal Prof. Krazer il voto da noi espresso in occasione del II Congresso internazionale dei matematici (v. *Bollettino* T. VI, 1903, p. 21) venne completamente esau-

Digitized by Google

dito; meno di un anno trascorse dal giorno in cui gli scienziati convenuti a Heidelberg si erano lasciati con un cordiale « arrivederci a Roma! », che già uno splendido volume, ben degno della celebre Casa che se ne fece editrice, è venuto a ricordare o far conoscere quanto allora fu esposto; ne sia lode a chi spetta!

Il volume che annunciamo è diviso in tre parti.

La I PARTE sotto il titolo di *Cronaca del Congresso* contiene gli atti ufficiali ed i verbali delle sedute.

La II PARTE è più importante ed interessante, giacchè sono ivi riprodotte le letture fatte sia nelle adunanze generali che nelle Sezioni. Nelle adunanze generali, oltre la commemorazione di Jacobi letta dal Königsberger, vennero tenute le seguenti conferenze:

Painlevé — Il problema moderno dell'integrazione delle equazioni differenziali.

Greenhill — La teoria matematica della trottola, considerata dal punto di vista storico.

Segre — La geometria d'oggidì e i suoi legami coll'analisi.

Wirtinger — Le lezioni di Riemann sulla serie ipergeometrica ed il loro significato.

Nelle varie sezioni del Congresso vennero poi fatte le comunicazioni seguenti:

Sezione I. — Aritmetica ed algebra.

Gordan — Sulla risoluzione delle equazioni del 6.° grado.

König — Sul problema del continuo.

Capelli — Contributo al teorema di Fermat.

Hocevar — Sulla determinazione dei fattori lineari di uua forma algebrica.

Guldberg — Sulle equazioni lineari alle differenze.

Minkowski — Sulla geometria dei numeri.

Hilbert — Sui fondamenti della logica e dell'aritmetica.

Voronoï — Su una proprietà del discriminante delle funzioni intere.

Wiman — Le equazioni metacicliche di nono grado.

Loewy — Sui gruppi riducibili di sostituzioni lineari omogenee.

Stephanos — Sopra una categoria di equazioni funzionali.

Wilson — Sui prodotti nei campi additivi.

Müller — Notizie sulla pubblicazione dei lavori postumi di E. Schröder.

Sezione II. — Analisi.

Schlesinger — Sul frammento riemanniano relativo alla teoria delle equazioni differenziali lineari e sui lavori recenti che vi si connettono.

Borel — Sull'interpolazione delle funzioni continue mediante polinomi.

Digitized by Google

Hilbert — Su un' applicazione delle equazioni integrali ad un problema della teoria delle funzioni.

Voronoï — Sullo sviluppo, mediante funzioni cilindriche, delle somme doppie $\Sigma f(pm^2+2qmn+rn^2)$, ove $pm^2+2qmn+rn^2$ è una forma positiva a coefficienti interi.

Fricke — Nuovi sviluppi sulla dimostrazione dell'esistenza di funzioni polimorfe.

Boutroux — Sulle funzioni intere d'ordine intero.

Mittag-Leffler — Sopra una classe di funzioni intere.

Hadamard — Sulle soluzioni fondamentali delle equazioni lineari a derivate parziali.

Capelli — Sulle formole d'addizione delle funzioni theta.

Sezione III. — Geometria.

Brill — Eliminazione e geometria negli ultimi decennii.

Macaulay — Le intersezioni delle curve piane, con estensione alle varietà algebriche a n dimensioni.

Study — Geodetiche nel campo complesso.

Fr. Meyer — Sui fondamenti di una teoria del tetraedro.

Rohn — Sulle curve gobbe algebriche.

Scheffers — Sopra le curve isogonali ed equitangenziali e sui numeri complessi.

Schönflies — Struttura delle varietà perfette.

Zindler — Sulla geometria differenziale dei complessi lineari.

Wilczynski — Teoria projettiva generale delle curve gobbe e delle superficie rigate.

Andrade — Determinazione dei movimenti di solidi a trajettoie sferiche.

Knoblauch — Formole fondamentali della teoria dei sistemi di raggi.

Lilienthal — Curve equidistanti su di una superficie.

Autonne — Sulle sostituzioni cremoniane nello spazio a più dimensioni.

Genese — Sopra alcuni teoremi utili nella moltiplicazione continua di un prodotto regressivo.

Study — Sopra il principio della conservazione del numero.

Sezione IV. — Matematica applicata.

Klein — Sul compito della matematica applicata, specialmente sopra il suo lato pedagogico.

Delaunay — Sul problema dei tre corpi.

Levi-Civita — Sulla risoluzione qualitativa del problema ristretto dei tre corpi.

Weingarten — Un esempio semplice di moto stazionario e senza rotazione di un liquido pesante a contorno libero.

Hadamard — Sulle condizioni ai limiti nelle equazioni alle derivate parziali della fisica matematica.

Digitized by Google

Sommerfeld — Sulla meccanica degli elettroni.
Genese — Sullo sviluppo dell'« Ausdehnungslehre » secondo i principii della statica.
Weber — Osservazioni sulla teoria delle equazioni a derivate parziali.
Andrade — Ricerche cronometriche.
Borsch — I fondamenti per la determinazione della figura della terra.
Finsterwalder — Rilievi rapidi mediante la fotogrammetria.
Prandtl — Sui moti dei liquidi soggetti a piccolo attrito.
Kempe — Un sistema articolato per la divisione dell'angolo.

Sezione V. — Storia della Matematica.

Cantor — Discorso inaugurale.
Tannery — Per la storia del problema inverso delle tangenti.
Dickstein — Wronski come matematico.
Simon — Sulla matematica degli Egiziani.
Zeuthen — Uso ed abuso di denominazioni storiche in matematica.
Schlesinger — Notizia sull'edizione delle opere di L. Fuchs.
Eneström — Quale posto spetta alla storia delle matematiche in una enciclopedia delle scienze matematiche?
Braunmühl — Sulla storia delle equazioni differenziali.
Suter — Sulla storia della matematica presso gl'Indiani e gli Arabi.
Loria — Per una storia della geometria analitica.
Vailati — Intorno al significato della differenza tra assiomi e postulati nella geometria greca.

Sezione VI. — Pedagogia.

Greenhill — L'insegnamento della meccanica mediante semplici applicazioni su larga scala.
Gutzmer — Sull'applicazione di sforzi ben diretti all'insegnamento nelle Università tedesche.
Loria — Sull'insegnamento delle matematiche in Italia.
Fehr — L'inchiesta di « L'enseignement mathématique » sul metodo di lavoro dei matematici.
Stäckel — Sulla necessità di lezioni universitarie regolari sulla matematica elementare.
Fricke — Osservazioni sull'insegnamento matematico nei Politecnici tedeschi.
Andrade — L'insegnamento scientifico nelle scuole professionali e la « mathématiques de l'ingénieur ».
Schotten — Quale è il compito dell'insegnamento matematico nelle scuole tedesche e come vi si prestano i programmi d'insegnamento?
Simon — Sopra i numeri complessi e l'insegnamento della geometria sferica; notizie storico-letterarie.

Digitized by Google

Thieme — Influenza dei progressi scientifici sull' insegnamento elementare della matematica.

Sourek — Sull' insegnamento matematico in Bulgaria.

Fr. Meyer. — Sull' essenza delle dimostrazioni matematiche.

Finsterbusch — Sopra un metodo semplice ed uniforme per determinare il volnme dei solidi la cui « funzione sezionale » non oltrepassa il terzo grado.

Brückner — Sopra i poliedri discontinui o non convesi aventi diedri e facce fra loro eguali.

Nella III PARTE del volume in esame è finalmente data notizia della esposizione di libri e modelli annessi al Congresso e sono pubblicate le conferenze illustrative che vennero ivi tenute dai professori Runge (*Sulla macchina per calcolare di Leibniz*), Wiener (*Sullo sviluppo delle forme geometriche*) e Schilling *(Quali vantaggi presenta l'uso di apparati di projezione nell' insegnamento matematico?)*.

Questo semplice indice mostra quanto numerose e svariate siano state le letture fatte al Congresso; appunto ciò rende impossibile un' analisi di tutte; ogni matematico deve avere quel volume nella propria biblioteca, sicuro di trovarvi molto di nuovo ed interessante. Per finire noi estrarremo dall' ultima parte un dato curioso: si calcola a 12 milioni e mezzo il numero dei volumi (incluse le nueve edizioni e le traduzioni) che furono pubblicate dal 1436 al 1902 inclusivi!

G. L.

PAOLO PIZZETTI — *Trattato di Geodesia Teoretica.* — Bologna, Zanichelli, 1905. 1 vol. di pagg. IX + 467. [Prezzo L. 12].

Con la pubblicazione del suo " *Trattato di Geodesia Teoretica* „ il chiarissimo Prof. Pizzetti ha reso agli studiosi un segnalato servizio. Egli ha arricchita la nostra letteratura scientifica d'un' opera veramente preziosa, non solo per quelli che intendono apprendere i fondamenti della Geodesia, imparandone a conoscere i metodi di ricerca ed i problemi principali, ma eziandio per quelli che, dopo aver appresi gli elementi di questa scienza, intendono farne uno studio più approfondito ed apprenderne le più importanti ricerche originali intorno ai vari problemi geodetici sì d'interesse strettamente scientifico e teorico, sì d'interesse pratico.

Il Trattato in parola, modellato, come dice l'A. nella prefazione, sopra le lezioni da lui impartite all'Università, è fatto in guisa da raggiungere egregiamente sì l'uno che l'altro intento, in quanto esso contiene, oltre i principi generali della Geodesia, cenni e notizie intorno alle ricerche relative ai più interessanti problemi geodetici, suf-

Digitized by Google

ficienti a servire di guida preziosa per chi voglia occuparsi di questi. In pari tempo l'A. si è astenuto dall'entrare, intorno a tali ricerche speciali, in dettagli, che, pur essendo di somma importanza, avrebbero potuto togliere al libro il suo carattere precipuo, come egli dice, d'opera di *genere didattico*, riuscendo quasi di ingombro per chi del trattato del prof. Pizzetti si serve per un primo studio.

Il servizio reso dal Prof. Pizzetti è tanto più da apprezzarsi, quando si pensi ai caratteri speciali che, fra le altre branche delle scienze esatte, presenta la Geodesia, caratteri che rendono compito ben arduo l'esporne i principii. — Invero la Geodesia richiede da un lato l'ausilio della *Geometria Differenziale*, trattando di problemi che per il loro studio richiedono l'uso delle teorie più elevate dell'*Analisi superiore;* ed in pari tempo essa comprende una parte strettamente sperimentale, riferentesi alle operazioni sul terreno (triangolazioni, livellazioni ecc.) Così si presenta al Geodeta quasi naturale il compito di ridurre le formole matematiche, fornitegli dall'Analisi, in guisa da renderle atte al calcolo numerico, e da acconciarle poi allo studio dei problemi sperimentali, onde ricavare una conveniente interpretazione dei risultati delle osservazioni. Forse nessun'altra delle scienze esatte comprende tanti argomenti e di così svariata natura, come la Geodesia. Ciò reca notevoli difficoltà a chi voglia esporre i principii fondamentali di questa scienza, ond'è che è doppiamente benemerito colui che, come il Prof. Pizzetti, ha queste difficoltà egregiamente superate.

L'A. trova conveniente, nell'esporre le formole fondamentali, per lo studio matematico della superficie terrestre (assunta come ellissoidica) di valersi, a seconda dell'opportunità, sì del metodo diretto, fondato sull'uso di formole speciali, corrispondenti ai vari problemi ogni volta studiati, come del metodo generale fondato sull'uso delle *coordinate curvilinee*. Ma pur, esprimendo nella prefazione la sua convinzione che la maggior generalità del metodo faciliti il compito dello studioso, l'A. per uniformarsi ai desideri di coloro che non volessero essere costretti a far uso di formole, appartenenti alle Matematiche superiori, dispose la materia in guisa che i capitoli, nei quali sono adoperate le coordinate curvilinee, possano essere lasciati da parte da chi volesse limitarsi ad apprendere le formole, per così dire, di prima necessità nello studio della Geodesia. Ciò nullameno alcuni argomenti di speciale importanza, quali ad es. le proprietà delle linee geodetiche, alcune parti della teoria della curvatura delle superfici sono trattati separatamente e con le coordinate cartesiane e con le coordinate curvilinee, in guisa che questa duplice trattazione ne pone meglio in vista i punti più salienti. Nello studio di altri argomenti, come ad es. nello stabilire l'espressione del coefficiente della prima forma diffe-

Digitized by Google

renziale quadratica relativa a una superficie, in coordinate polari geodetiche, l'A. con felice eclettismo applica elegantemente gli sviluppi di Puiseux-Weingarten per le coordinate cartesiane ortogonali a dedurre formole relative alle coordinate curvilinee.

E pure con calcoli e procedimenti elegantissimi il Pizzetti da le formole, in coordinate curvilinee, relative alla rappresentazione d'una superficie su un'altra (in particolare sul piano), avendo cura, non appena ciò sia possibile, di sfrondare le formole stabilite di tutto ciò che ha interesse esclusivamente matematico per ridurle tali da poter essere facilmente usate nella pratica, particolarmente nella costruzione delle carte geografiche.

Nei problemi matematici che interessano il geodeta (quali ad es. il calcolo della lunghezza d'un arco di meridiano, il trasporto delle coordinate geografiche e degli azimut lungo un arco di geodetica, il calcolo degli scostamenti tra geodetiche e sezioni normali aventi gli stessi estremi), è mestieri fare largo uso di sviluppi in serie: a che questi possano utilmente prestarsi ai calcoli numerici è di capitale importanza stabilire a qual punto si possano arrestare tali sviluppi, senza commettere errori apprezzabili. Il combinare, nello studio di questi argomenti, il rigore matematico con le esigenze della pratica, costituisce senza dubbio una forte difficoltà: pertanto detti argomenti formano una delle parti più caratteristiche della geodesia. Così appunto la lettura dei §§ dedicati a questi stessi argomenti, dà modo di rilevare uno dei principali pregi del libro del Prof. Pizzetti. L'A. ebbe cura di seguire qui la via tracciata dai grandi luminari che gettarono, si può dire, le basi scientifiche della geodesia (Legendre, Bessel, Gauss ecc.) usando di procedimenti, che, divenuti ormai classici, costituiscono oggi ancora i principii fondamentali dello studio d'una parte di questa scienza. Così l'A. ebbe cura, nel trattare del calcolo della lunghezza d'un arco di meridiano, di indicare uno sviluppo dovuto a Legendre e Bessel, sviluppo che si applica ad un esteso gruppo di problemi, i quali vengono trattati nel seguito.

Allorchè, esposta la parte matematica della geodesia, l'A. passa a trattare di argomenti riflettenti operazioni pratiche (misure di basi e di angoli, livellazioni) egli si addentra nei più minuti particolari relativi alle norme che devono essere seguite, onde le operazioni stesse siano compiute col rigore necessario a che esse possano servire di punto di partenza per ricerche scientifiche.

Ammirevole è pure l'esposizione degli elementi della teoria delle probabilità. Qui l'A. ebbe cura di trattare l'argomento in guisa che il lettore possa vedere chiaro il nesso fra le formole matematiche usate e gli avvenimenti reali ai quali esse si riferiscono: in guisa cioè che tutto ciò che si connette al concetto di probabilità matema-

Digitized by Google

tica appaia non già, come un'astrazione matematica, bensì come una logica deduzione delle leggi che regolano i fatti osservati. L'A. ad es., prima di esporre il celebre teorema di Bernoulli, stabilisce in modo intuitivo, si può dire anzi empirico, la legge espressa da questo teorema. Così tutta l'esposizione della teoria degli errori è informata a questo stesso obbiettivo; dimostrare cioè il nesso fra teoria e fatti. Ovunque l'A. ha cura di valersi dei risultati delle ricerche più recenti in guisa che il lettore possa farsi un'idea delle più importanti ricerche geodetiche. E poichè l'obbiettivo prefissosi dall'A. lo obbligò a dare di taluni argomenti solo brevi cenni, senza addentrarsi in minuti particolari che sarebbero usciti dal campo d'un'opera didattica, egli a questo supplì in modo ammirevole con una serie di note, aggiunte in fine al libro. In questa parte del libro noi troviamo ordinatamente cenni relativi alle opere più importanti intorno alla figura della terra, allo studio analitico del geoide e alle operazioni pratiche destinate a fornire i dati che costituiscono la base delle ricerche geodetiche. In questi cenni sono passate in rivista le opere principali relative ad argomenti geodetici, incominciando da quelle di Delambre, Legendre, Gauss, per giungere a quelle recentissime di Andrae, Helmert ecc. Così vi sono notizie intorno alle principali operazioni geodetiche; e fra queste l'A. ebbe cura di segnalare le importantissime operazioni del nostro Istituto geografico, militare. Oltre poi indicare le opere ove si trova la trattazione completa degli argomenti, dei quali nel libro si poterono dare solo brevi cenni, l'A. volle eziandio menzionare in queste note le opere nelle quali taluni dei problemi che pur furono da lui trattati diffusamente, si trovano studiati con metodi diversi da quelli ch'egli usò.

Non mancano neppure notizie storiche, atte a dare un'idea del come s'andarono perfezionando i metodi, con i quali si conducono le ricerche geodetiche.

Le note in discorso costituiscono una parte veramente preziosa del libro del Prof. Pizzetti, in quanto esse danno al lettore desideroso d'addentrarsi nello studio della geodesia, tutte le indicazioni necessarie intorno alle fonti, alle quali egli deve ricorrere. Era pertanto ben opportuno che di dette note si parlasse sin dall'inizio.

Dopo questi fugaci cenni sintetici intorno ai caratteri più salienti del libro del quale stiamo occupandoci, è bene diamo ora un'indicazione sommaria della materia contenuta nei singoli capitoli.

Un primo capitolo espone i concetti fondamentali intorno agli scopi ed ai metodi della geodesia. L'A. parte dalle considerazioni meccaniche, con le quali si perviene alla definizione di superficie di livello, terrestri e indica di quale natura e forma siano tali superfici, dando in pari tempo un'idea del contributo che alla conoscenza della figura

Digitized by Google

del geoide recano da un lato le misure della lunghezza d'archi di meridiano, dall'altro quelle di gravità fatte col pendolo.

Le dotte considerazioni, chiaramente esposte dall'A. in questo capitolo, vanno tanto più apprezzate, in quanto è manifesto come sia necessario a chi, per la prima volta si dedica allo studio della geodesia, farsi un' idea chiara e dei concetti e delle ipotesi fondamentali, che costituiscono il punto di partenza delle ricerche, costituenti l'oggetto di questa scienza.

Stabilito così come la superficie di riferimento assunta in tali ricerche abbia la forma d'un ellissoide di rivoluzione, l'A. dà in un secondo capitolo le formole fondamentali relative a quest'ellissoide. Qui alle relazioni fra coordinate cartesiane ortogonali e coordinate geografiche, seguono le nozioni intorno alle proprietà della lossodromia, il calcolo della lunghezza d'un arco di meridiano e d'un arco di parallelo, e il calcolo della superficie d' una porzione di ellissoide, racchiusa fra due meridiani e due paralleli. Questo ultimo calcolo è eseguito in due modi differenti. Nello stesso capitolo troviamo pure uno studio della curvatura delle linee tracciate su una superficie, con particolare riguardo alle sezioni normali. Qui vengono stabiliti i classici teoremi di Meunier e di Euler, si determina quali sieno le sezioni principali dell'ellissoide di rivoluzione, e se ne calcolano i raggi di curvatura ecc., ecc. Il capitolo si chiude con l'esposizione degli elementi relativi al metodo delle coordinate curvilinee per lo studio d'una superficie qualunque. Dopo aver date le formole fondamentali (lunghezza dell'elemento lineare, angolo di due direzioni, elemento d'area) l'A. studia le superficie applicabili, poi, in particolare quelle di rivoluzione, ponendo opportunamente in rilievo l'importanza che per lo studio di queste ultime ha la scelta dei meridiani e dei paralelli come linee coordinate.

Il terzo capitolo è dedicato particolarmente allo studio delle linee geodetiche. L'A. assume come proprietà caratteristica di tali linee, quella che lungo tutto il corso di ciascuna di queste, la sua normale principale coincide con la normale alla superficie. Solo più innanzi egli pone in luce l'altra proprietà caratteristica d'una di queste linee, che cioè entro una limitata regione della superficie, essa rappresenta il più breve cammino fra due punti. Ma appunto era bene. come fece il Prof. Pizzetti partire dalla considerazione della prima delle accennate proprietà della linea geodetica, in quanto essa è la proprietà generale che vale lungo tutta la linea, laddove la seconda non sussiste se non entro certi limiti. L'A. in questo capitolo passa naturalmente subito a considerare, in particolare, le linee geodetiche su una superficie di rivoluzione, dimostrando il ben noto teorema di Clairaut, dal quale deduce poi altre proprietà e formole importanti (equazione

Digitized by Google

delle geodetiche in coordinate geografiche, teorema di Gudermann ecc., ecc.). Relativamente a tali formole l'A. dà pure qualche applicazione numerica (v. pag. 63).

Indi troviamo qui i classici sviluppi di Puiseux-Weingarten, i quali permettono poi di dedurre varie altre formole importanti, particolarmente intorno agli scostamenti fra geodetiche e sezioni normali aventi gli stessi estremi.

In questo stesso capitolo l'A. studia le linee geodetiche con l'ausilio delle coordinate polari geodetiche, soffermandosi in particolare sulle coordinate polari geodetiche e le loro applicazioni. Infine egli studia, mercè l'uso delle coordinate curvilinee, la teoria della curvatura delle superfici e delle linee tracciate su esse, terminando col dare l'espressione della curvatura assoluta mediante i coefficienti della prima forma differenziale quadratica (in coordinate curvilinee, ortogonali).

Il quarto capitolo tratta del problema di capitale importanza, del *trasporto delle coordinate geografiche e degli azimut* lungo una geodetica. Il problema, diremo così, diretto, è trattato col metodo di Legendre e Bessel, ricorrendo a sviluppi in serie che rientrano nelle formole generali, date trattando del calcolo della lunghezza d'un arco di meridiano.

Allo studio di questo problema l'A. fa seguire gli sviluppi delle coordinate geografiche e dell'azimut in serie di potenze dell'arco di geodetica, dedotti in modo molto elegante.

Per la risoluzione del problema inverso delle posizioni geografiche, l'A. dà due metodi, l'uno per archi di lunghezza qualunque, l'altro per piccoli archi. Entrambi questi metodi sono molto eleganti. Alla risoluzione del problema si perviene per successive approssimazioni in modo. per così dire indiretto. Il capitolo si chiude col calcolo delle così dette *coordinate geodetiche ortogonali* (lunghezza d'un arco di meridiano e d'un arco di geodetica ad esssa ortogonale).

Il capitolo seguente è dedicato allo studio dei triangoli geodetici e della curvatura geodetica. Qui l'A. dimostra in due modi diversi come un triangolo geodetico (sull'ellissoide di rivoluzione), possa, entro certi limiti, essere sostituito, con sufficiente approssimazione, mercè un triangolo sferico tracciato su una sfera di raggio conveniente. Il primo metodo è basato sopra la considerazione diretta degli sviluppi d'un arco di meridiano e d'uno di parallelo, secondo le potenze della lunghezza d'un arco di geodetica: il secondo è basato sull'uso delle coordinate curvilinee. Ogni volta l'A. ha cura di stabilire quale sia il grado d'approssimazione che si raggiunge. Il capitolo termina con lo studio della curvatura geodetica d'una linea tracciata su una superficie e con l'esposizione di considerazioni che derivano da quella di tale curvatura.

Digitized by Google

Con ciò è finita l'esposizione di quanto si riferisce allo studio matematico dell'ellissoide terrestre. Qui, mentre, come si disse, l'A. ebbe cura di trattare con vari metodi, gli argomenti di maggiore importanza, si limitò sovente a dare di alcuni teoremi il solo enunciato, ommettendone la dimostrazione, in quanto questa sarebbe stata superflua, dato lo scopo al quale è informato il libro in parola. E invero è ovvio come l'esposizione di lunghe considerazioni, aventi solo interesse matematico, avrebbe distolta, sia pure momentaneamente, l'attenzione del lettore, dall'argomento fondamentale del libro.

Il capitolo VI, dedicato alla misura delle basi geodetiche, va particolarmente segnalato all'attenzione degli studiosi, in quanto da notizie, relativamente agli apparecchi usati in tali misure, di studi fatti negli ultimi anni, studi quindi dei quali non si trova menzione nei precedenti trattati. Così troviamo ad es. nel § 70 un cenno dell'apparecchio di Eimbeck per la misura delle basi, apparecchio fondato sul sistema dei contatti, e il cui uso rimonta solo al 1897. Del pari troviamo qui un largo cenno dell' apparecchio Ibanez a sistema ottico.

Il capitolo VII contiene una minuta descrizione dell' Universale geodetico (insieme con qualche cenno sugli istrumenti derivati da questo). Questo capitolo tratta diffusamente dell'uso dell' Universale nella misura degli angoli, dando tutte le nozioni necessarie per calcolare ed eliminare i possibili errori.

Il capitolo VIII tratta delle triangolazioni geodetiche e contiene tutto quanto si riferisce a queste operazioni, dalle norme pratiche sul modo di eseguirle e dalla descrizione dei principali apparecchi che in esse si adoperano, ai calcoli necessari per la risoluzione dei triangoli. Non mancano qui neppure cenni intorno ad alcuni triangoli geodetici che occupano posti di notevole importanza in triangolazioni effettivamente eseguite. Si trova invero un cenno intorno alla rete del Reno, ed al grande triangolo Mulhacen-Teticat. Filhaussen, che appartiene a quelli che servirono per il collegamento della Spagna con l'Africa. Qui naturalmente all'esposizione del metodo diretto per la risoluzione dei triangoli ellissoidici, sostituiti, in base a considerazioni svolte nei precedenti capitoli, con triangoli sferici, segue l'esposizione del metodo di Legendre relativo alla sostituzione del triangolo sferico con uno rettilineo avente lati d'uguali lunghezze. Da ultimo l'A. dà un cenno intorno al trasporto delle coordinate geografiche e delle coordinate geodetiche ortagonali da uno all'altro vertice d'una rete e chiude il capitolo, ponendo in rilievo come, in causa delle deviazioni della *verticale*, altri calcoli ed altri studi siano necessarii a che le triangolazioni rechino un reale contributo eziandio alla conoscenza della vera forma del geoide.

Il capitolo IX tratta della livellazione: in esso sono studiate e

Digitized by Google

l'altimetria trigonometrica e la livellazione di precisione. Qui sono poste in luce le difficolta che nell'eseguire operazioni di livellazione recano le irregolarità della superficie terrestre, difficoltà che solo con particolari artifici, qui pure indicati, si possono superare.

I tre capitoli seguenti (X-XII) sono dedicati allo studio della teoria della probabilità e degli errori d'osservazione e delle loro applicazioni alla geodesia. Il primo capitolo di questa parte del libro, della quale già abbiamo tenuto parola, contiene i principii della teoria delle probabilita e di quella degli errori, dando in modo chiaro e preciso i concetti di error medio, di errore probabile e le formole atte a stabilire le leggi fondamentali intorno a questi errori. Il capitolo XI (teoria della combinazione delle osservazioni) tratta nella prima parte (§§ 138-148) della vera e propria combinazione delle osservazioni: la seconda parte (§§ 143-151) contiene i principi della teoria dei minimi quadrati. Il capitolo XI ha per obbiettivo, esporre l'applicazione alla geodesia dei principi contenuti nei due precedenti capitoli. Perciò in esso l'A. prima tratta dello studio delle osservazioni, quando queste siano soggette a condizioni, espresse da determinate equazioni, alle quali devono soddisfare i loro risultati: di poi molto opportunamente tratta a lungo della compensazione delle triangolazioni, questo essendo il problema geodetico fondamentale la cui risoluzione è fondata in gran parte sul conveniente uso della teoria di minimi quadrati.

Nel capitolo XIII, dedicato allo studio delle deviazioni della verticale l'A. da a tutta prima le formole fondamentali per le deviazioni in latitudine, longitudine ed azimut (formola di Laplace): di poi dà un cenno del metodo di Helmert per la determinazione delle deviazioni delle verticali in una data regione (deviazioni che in una data regione presenta il Geoide rispetto all'Ellissoide assunto come superficie di riferimento) e per la costruzione del Geoide, dedotta da queste determinazioni. Per maggiori dettagli in proposito l'A. rinvia alle opere originali dello stesso Helmert. Nell'ultimo § di questo capitolo poi il Prof. Pizzetti espone in modo chiaro e suggestivo come le irregolarità della corteccia terrestre diano luogo a deviazioni del geoide dalla forma ellissoidica, deviazioni rivelate da misure di gravità.

I capitoli XIV e XV sono dedicati alla cartografia. Il primo di questi contiene la trattazione del problema della rappresentazione d'una superficie su un'altra, facendo largo uso, come s'è detto, delle coordinate curvilinee e diffondendosi particolarmente sulle superfici di rivoluzione. Il capitolo seguente, ultimo del libro, tratta della effettiva applicazione delle teorie esposte nel capitolo XIV alla costruzione delle carte geografiche. Qui sono passati in rassegna i principali tipi di queste: essi vengono distinti fondamentalmente in due tipi: carte

Digitized by Google

isogoniche e carte a rappresentazione equivalente. In questo capitolo troviamo quà e là, opportunatamente inserito, qualche cenno d'indole storica e anche qualche cenno relativo ad esempi di carte eseguite in base all'uno od all'altro dei metodi esposti. Mentre il capitolo XIV contiene più che altro concetti d'indole matematica in quest'ultimo capitolo, valendosi dei risultati stabiliti nel precedente, l'A. tratta di argomenti d'indole prevalentemente pratica. Egli, parlando delle carte equivalenti a paralleli circolari ceercentrici equidistanti non trascura di dare un cenno intorno alla carta d'Italia eseguita con questo metodo. Con questo capitolo è terminata l'esposizione della materia costituente l'argomento principale del libro. Vengono di poi sotto il titolo di « Note Bibliografiche e Correzioni » quelle pregevolissime notizie, delle quali già fu tenuta parola.

A queste il prof. Pizzetti fa seguire alcune tabelle relative all'ellissoide di Besbnel, le quali contengono i principali elementi corrispondenti a quest'ellissoide, necessari per eseguire calcoli numerici con le formole stabilite; poi una tabella relativa al valore della ben nota funzione che serve a determinare la probabilità che in un dato numuro di prove un avvenimento si verifichi un numero di volte compreso entro certi limiti. Da ultimo l'A. chiude il suo ottimo libro con le tabelle relative alle deformazioni lineari ed angolari in alcune proiezioni geografiche.

Nel libro in parola la materia è esposta in modo così chiaro, completo e suggestivo che la sua lettura varrà, ne abbiamo ferma fiducia, ad accrescere nel lettore, l'interesse per la Geodesia che è senza dubbio una delle branche più belle delle scienze esatte si che è legittimo sperare che esso varrà pure ad accrescere nel nostro paese, il numero dei cultori di questa scienza, in quanto esso serve anzitutto mirabilmente ad agevolare la via a chi voglia apprendere i fondamenti della Geodesia.

A. VITERBI.

P. MANSION. — *Calcul des probabilités. Sa portée objective et ses principes.* Paris, Gauthier-Villars, 1905.

Attenendosi al lodevole sistema da cui ebbero origine due volumi di *Mélanges mathématiques* (1882, 1894) l'A. ha raccolto in questo opuscolo il bellissimo discorso che già segnalammo ai nostri lettori (*Bollettino*, T. VII, 1904, p. 91) e altre quattro note sul calcolo delle probabilità, da lui pubblicate negli anni 1902-04. Così il legame di tali lavori riesce ora più palese di quello che fosse in passato.

G. L.

Digitized by Google

W. W. ROUSE BALL. — *Mathematical Recreations and Essays.* 4th Edition. London, Macmillan, 1905, 8°, p. XVI + 402 [Prezzo del vol. leg. 7 scellini].

Nella nuova edizione che annunciamo, l'opera del Ball conserva i lineamenti generali che indicammo a proposito della traduzione francese di essa. *(Bollettino,* T. II, 1899, p. 21-22). Ma l'A., oltre a farvi ritocchi e correzioni, vi aggiunse tre capitoli interessanti, uno su quel gruppo di esami chiamato « the mathematical tripos », l'altro sopra i numeri di Mersenne e l'ultimo sulla criptografia. Crediamo superfluo aggiungere altro, trattandosi di un lavoro ormai giudicato.

G. L.

NOTIZIE

GIORGIO SALMON, l'amico e compagno di lavoro di Arturo Cayley, nacque a Dublino il 20 Settembre 1819. Studente del Collegio della Trinità del patrio loco, ne uscì ventenne col titolo di « first senior moderator »; e, avendo ottenuto l'anno seguente il premio Mudden, gli fu conferito il titolo di « fellow », in forza del quale cominciò la sua carriera d'insegnante, e la continuò fino al 1866, essendo a partire dal 1858 in pari tempo investito della carica di « Donegal-lecturer ». Nell'anno 1843 cominciò a farsi conoscere nel mondo scientifico, presso il quale doveva presto acquistarsi tante benemerenze, pubblicando i celebri trattati sulle *Sezioni coniche* (1848), sulle *Curve piane* (1852), sull'*Algebra moderna* (1859), sulla *Geometria a tre dimensioni* (1862). Ma sin dal 1861 si rivelò anche come acuto e profondo teologo, tanto che nel 1866 ebbe il grado di « Regius professor of divinity », che conservò sino alla morte (22 Gennaio 1904); dal 1888 era poi « Prevost of Trinity College ».

Un'esauriente analisi dell'opera matematica del Salmon fu fatta dal Prof. Nöther e pubblicata nel LXI vol. dei *Mathematische Annalen.*

***

MATHEM. UND NATURWISS. BERICHTE AUS UNGARN. — Il XX vol. di questa raccolta (recante il millesimo 1902 ma solo testè pubblicato dalla Casa Teubner) contiene di interessante i matematici un commento del Fischauf alle ricerche postume di G. Bolyai sulla cubatura del tetraedro, quattro note di M. Bauer, una sulle operazioni irriducibili, due sulle congruenze e l'ultima destinata a completare in un punto importante la celebre *Festschrift* dell'Hilbert, finalmente il riassunto

Digitized by Google

delle ricerche di meccanica analitica pubblicate da M. Réthy nel T. LVIII dei *Mathematische Annalen.*

***

Secondo Congresso di filosofia. — La casa editrice H. Kundig di Ginevra ha testè pubblicata con signorile eleganza un volume di quasi mille pagine in-8° *(Congrès international de philosophei. II Session tenue a Genève du 4 au 8 Septembre 1904. Rapports et Comptes-rendus publiés par Ed. Claparède)* destinato a diffondere in tutto il mondo degli studiosi l'eco delle discussioni che tennero i filosofi per la seconda volonta adunati. Tale volume va segnalato ai nostri lettori perchè fra gli scritti in esso raccolti parecchi toccano le scienze esatte e la loro storia. Eccone i titoli:

R. de Montessus de Ballore, *Una definizione logica di caso e di probabilità.*
L. Couturat, *Sull'utilità della logica algoritmica.*
P. Boutroux. *Sulla nozione di corrispondenza nell' analisi matematica.*
A. Reymond. *Nota sopra il giudizio geometrico.*
I. Andrade, *La geometria meccanica.*
H. G. Zeuthen, « *Teorema di Pitagora* »; *origine della geometria scientifica.*
P. Duhem, *Dell'accelerazione prodotto da una forza costante. Note per servire alla storia della dinamica.*
V. Matet, *Notizia storica sull' uso di procedimenti materiali e di strumenti in geometria pratica nel Medio Evo.* (Secoli X-XIII).

Aggiungiamo che il volume stesso contiene una biografia di Paolo Tannery scritta dal fratello Giulio con intelletto d'amore e va adorna dei ritratti di E. Naville (presidente onorario del Congresso), J. J. Gourd (presidente effettivo del Congresso stesso), E. Boutroux (presidente I Congrosso di filosofia), W. Windelband (presidente del III Congresso, che verrà tenuto a Heidelberg) e P. Tannery.

***

Riproduzioni diplomatiche di classici. — Proseguendo nella via per la quale si è messa (v. *Bollettino,* T. VII, 1904, p. 32) la casa A. Hermann di Parigi ha testè posto in vendita al prezzo di 5 fr. il fac-simile della *Pangéometrie* di Lobatschewsky. Il lodevole fervore col quale oggi si studiano i principii della geometria fa fede dell'opportunità di siffatta pubblicazione.

Bestonzo Pietro, Gerente.

Genova - Tipografia R. Istituto Sordomuti - 1905.

Digitized by Google

INDICE DEI NOMI

Abbati 72.
Abel 21.
Adam 29, 94.
Ahrens 51.
Alasia 26 *n.*
d'Alembert 25, 66, 68.
Alfieri 7 *n.*
Amaldi 20, 42
Amiot 101.
Amodeo 95. 110-114
Ampère 18, 91, 92.
Andrae 121.
André 62.
Andrade 116, 117, 128
Appell 60.
Archimede 75. 80, 95, 111.
Arconati 15.
Aronhold 24.
Armenante 72.
Ascoli 72.
d'Aubusson 8 *n.*
Autonne 116.

Bachet 79.
Bacone 79.
Bäcklund 89
Ball Rouse 70-72. 100, 127.
Ball Stawell 68.
Baltzer 13 *n.*
Barabino 95.
Barbieri 84.
Bardey 35.
Barduzzi 79.
Bartolini Salimbeni L. 7.
Battaglini 1 *n.*, 72.
Baudin 29.
Bauer 127.
Bedetti 72.
Bellavitis 13 *n.*, 14. 72.
Beltrami 72.
Bernoulli Giov. 4, 5.
Bernoulli Giac. 52, 121.
Bertana 6 *n.*
Berthier 7 *n.*
Bertrand E. 69.
Berzolari 83.
Bessel 22, 120, 123, 126.
Betti 72.
Biernatzki 99.
Biot 49, 98, 100.
Bjerknes 20-21.
Bobillier 17.
Borsch 117.
Boldmann 82.
Bolyai 79, 102, 127.
Boltzman 91
Bonola 33, 72.
Boncompagni 72, 101.
Boole 23.
Borchardt 26.
Bordin 62.
Bordoni 72.
Borel 62, 115.
Borromeo (Cardinale) 15.
Bortolotti 6 *n.*, 84.
Bosman 31.
Boulanger 39.
Bour 91.
Boutroux 116, 128.
Braunmühl 80, 117.
Bruckner 118.
Brianchon 20, 86, 111, 112, 113.
Bricard 62.
Brill 116.
Brioschi 24, 63, 72.
Broch 21.
Brunacci 72.
Bruns 21-22.
Burali-Forti 43-46, 94.
Burg 13 *n.*
Burnham 62.
Bustelli 96.

Calchi 15.
Cantor M. 30, 79, 100, 101, 117.
Capelli 115, 116.
Caporali 72.
Cardano 79. 95.
Casorati 72.
Cassini 19.
Castelnuovo 15-20.
Castrioti 81.
Cauchy 2, 21, 26, 58, 60, 82, 90, 92, 107, 109.
Cavalieri 31, 76, 95.
Cayley 24, 43, 53.
Cazzaniga 72.
Cesàro 51-52.
Ceva 114.
Charpit 90, 93.
Chasles 2, 43, 86.
Chaumié 29.
Chelini 72.
Chen-Kung 98, 99.
Chiao-Kiung-King 97.
Chin-Loan 97.
Ciani 114.
Chilovi 6 *n.*
Chió 72.
Classen 46-49.
Clavio 34 *n.*
Clebsch 24, 43, 90, 102, 104.
Clifford 50.
Christoffel 87.
Claparède 100, 128
Codazzi 72.
Compte 93.
Coppino 15.
Cornu 47.
Correnti 15.
Corsini Neri 7.

Digitized by Google

Cossali 72.
Couturat 128.
Crelle 25, 26.
Cremona 72.

Darboux 26, 92, 93.
Darvai 79.
Dassen 24.
Decio 37 *n*.
Dedekind 8, 43, 86, 111.
Dehn 36.
Delambre 6, 101, 121.
Delaunay 116.
Desargues 13 *n*., 20, 110, 113.
Descartes 38, 80, 95, 110.
Dickstein 117.
Dini 58 *n*., 63, 72.
Diofanto 29.
Dirichlet (vedi Lejeune-Dirichlet).
Doll 108.
Donati 67.
Douglas 97.
Drude 47.
Duhem 128
Dumont 74.

Ebert 47.
Eimbeck 124.
Enestrom 13 *n*., 80, 117.
Engel 33, 39, 40, 41, 47, 77, 102.
Enriques 20 *n*.
Euclide 34 *n*., 36 *n*., 66, 77, 95.
Eulero 2, 2 *n*., 3, 4 *n*., 5, 13 *n*., 38, 52, 54, 69, 110, 122.

Fantasia 100.
Faraday 46, 49.
Favaro 31, 95.
Fehr 117.
Feldhaus 30.
Ferdinando di Toscana 7.
Fergola 72, 95.
Fermat 95.
Ferrari 81.
Ferraris 67, 77.
Fibonacci 95.
Fiedler E. 23.
» G. 23.
Finsterbusch 118.
Finsterwalder 117.
Flauti 72.
Föppl 67.
Fontana F. 7
» G. 72.
Fort 55.
Fossombroni 7.
Foucault 62.
Fourier 82.
dei Franceschi 80.
Francoeur 62.
Frenet 45.
Fricke 116, 117.
Frischauf 102, 127.
Frisi 2, 2 *n*.
Frullani 72.
Fuchs L. 42, 43, 117.
» R. 42.
Fujisawa 63.

Galileo 31, 51, 95, 96.
Galois 12, 56.
Gambioli 70, 72.
Garbasso 49.
Gaubil 98, 99, 101.
Gauss 12, 21, 25, 51, 58, 102, 120, 121.
Gavardi 14.
Gazzaniga 32.
Genese 116, 117.
Genocchi 72.
Giacosa 79.
Gibbs 67.
Gibson 51.
Ginzel 78, 100.
Giorgini 1, 1 *n*., 2, 72.
Giudice 57 *n*., 60.
G. L. (vedi Loria).
Gmeiner 85.
Gordan 24, 115.
Gourd 128.
Grace 23.
Graf 26.
Grassmann 43, 67, 77, 107, 108
Grenhill 115, 117.
del Grosso 72.
Guccia 62.
Guldberg 115.
Günther 80.
Gutzmer 117.

Hadamard 58, 116.
Halsted 74-77.
Hamilton 43, 44, 45, 69, 91, 107, 108.
Hankel 22.
Harnack 82.
Hansteen 21.
Hatt 27.
Hauck 93.
Hazer 64.
Heaveside 67.
Heger 55.
Heiberg 30.
Helmert 121, 125
Helmholtz 61.
Henry 29.
Hermite 24, 37, 38.
Hertz 49.
Hilbert 74, 75, 76, 115, 116, 127.
Hocevar 115.
Holzmüller 61-62.
Hospital 60.
Huygens 43, 44, 69.

Ibanes 124.

Jacobi 60-61, 69, 90, 91, 115.
Jahnke 107-108.
Joachimsthal
Jordan 24.
Joule 48.
Junker 94.

Kanser 96.
Kempe 117.
Killing 102.
Kirchhoff 48.
Klein 68, 83, 116.
Klimpert 100, 101.
Knoblauch 116.
König 3-12, 92.
Königsberger 60-61, 115.
Kovalewski G. 51-52.
» Sofia 69.

Digitized by Google

Krazer 114.
Kronecker 8, 9, 10, 12.
Kummer 8, 43.

Lacroix 13 *n*.
Lafitte 29.
Lagrange 25, 49, 58, 59, 69, 90, 92.
Laguerre 37-38.
Lalande 6 *n*., 62.
Lambert 32.
Lamé 21.
Lamy 66, 66 *n*.
Lampe 53 *n*., 79, 93.
Laplace 93, 125.
Lebon 94.
Legendre 36, 36 *n*., 120, 121, 123, 124.
Leibniz 39, 43, 44, 59, 79, 95, 118.
Le Jeune-Dirichlet 21, 53-55.
Lemoine 62.
Leonardo da Vinci 14-15.
Leoni 14-15.
Leopoldo di Toscana 7.
Levi-Civita 69, 116.
Le Paige 71.
Libri 29, 73, 81.
Li-chun-fung 97.
Lie 38, 39, 40, 41, 42, 91, 92.
Liebman 31, 102-3,
Lilienthal 116.
Lindelöf 108-109.
Lindemann 102, 103, 104.
Lindt 31.
Liouville 25, 91.
Lodovico di Borbone 7.
Lobatschewsky 31, 102, 128,
Loftus 101.
Loewy 115.
Lorentz 67.
Lorgna 72.
Loria 1 *n*., 14, 15, 21, 23, 24, 27, 38, 39, 43, 46, 50, 51, 53, 55, 56, 61, 62, 65, 70, 71, 72, 73, 74, 78, 79, 82, 83, 84, 86, 87, 103, 104, 105, 108, 117, 118, 126, 127.
Lucas 79.
Lüroth 22.

Macfarlane 77-78.
Maclaurin 59, 60, 86.
Macaulay 116.
Mach 69-70, 80.
Mailla 101.
Maillet 95.
Mainardi 73.
Maggi 72
Malfatti 72.
Manfredini 7.
Mansion 126.
Manuzio Aldo 14.
Marcolongo 1, 8, 26, 67, 69.
Maria Luisa 8.
Mascheroni 72.
Matet 128.
Maupin 51.
Maxwell 46, 47.
Mayer 90, 91, 118.
Mazzenta 14.
Melzi F. 14.
» O. 14.
Menelao 114.
Mersenne 127.
Meunier 122.
Meyer 105-107, 116.
Michelson 82.
Millosevich 78.
Minkowski 115.
Minding 26.
Minich 72.
Möbius 17, 26.
de Moivre
Molk 32.
Monge 91, 92.
Moors 31.
de Montessus 128.
Montyon 62.
Mori 80,
Mossotti 72.
Mozzi 1-8.
Müller C. H. 30.
» E. 115.
» F. 80.
Murat 7 *n*.

Naetsch 70.
Naville 128.
Neper 79, 95.
Nestle 108.
Netto 72-73.
Neumann 22.
Newton 6 *n*., 26, 86, 95.
Nielsen 22.
Noether 41, 62, 127.

Ohm 48.
von Oettingen 50.
Oppolzer 78.
d'Ovidio 86, 103.

Paciuolo 79.
Padelletti 72.
Padova 72.
Padula 73.
Painlevé 115.
Pao-hi 98.
de Paolis 72, 111.
Parennin 101.
Pascal B. 18, 20, 86, 111, 112, 113.
Pascal E. 87.
Peano 44, 67, 79, 108.
Pelz 82.
Petersen 50.
Pfaff 88, 91.
Piazzi 96.
Picard 69.
Pignotti 7.
Pincherle 73-74.
Pini 65 *n*.
Piola 72.
Pisano Leonardo (vedi Fibonacci).
Pitagora 95, 99, 100.
Pittarelli 80.
Pizzetti 118-126.
Poggendorff 6 *n*., 50.
Poincaré 37, 62, 103-105.
Poinsot 3, 69.
Poisson 91.
Poncelet 62.
Prandtl 117.
Puini 98.
Puiseux 123.
Puliti 70, 100.

Quérard 66.

Raffaello 95.

Digitized by Google

Ranieri 31.
Rawlinson 101.
Rebière 51.
Retali 78.
Réthy 128.
Reyes y Prosper 63.
Richard 62.
Riess 48.
Riemann 54, 109.
Riccardi 72.
Rohn 116.
Rolle 59, 60.
Romano Adriano 31.
Rossignol 66.
Rouché 37.
Rousseau 65-66, 66 *n*.
Rubini 72.
Ruffini 6 *n*., 13 *n*.
Runge 81-82, 118.

Saccheri 34, 36.
Saladini 72.
Salmon 23-24, 86, 127.
Sannia 72.
Savart 19.
Scheffers 39, 116.
Schering 12.
Schilling 83-84, 118.
Schläfli 26-27, 94.
Schlesinger 42, 73, 115, 117.
Schlomilch 55, 70.
Schönflies 116.
Schotten 13, 117.
Schoute 85.
Schubert 94, 109-110.
Schüssler 82-83.
Schur 23, 32, 75.
Schwering 94.
Sédillot 100-101.
Segner 3.
Segre 62, 77, 78, 115.
de Séguier 56.
Selvatico 8 *n*.
Servant 62.
Serret 82.
Sen fa 98.
Seyffahrt 55.
Shang-Kao 98-99.
Simon 117.
da Silva 26, 26 *n*.
Smith D. E. 95.
Sommerfeld 67, 117.
Sourek 118.
Stäckel 33, 102, 117.
Staudt 18, 20, 110.
Steiner 17, 18, 20, 26, 53 *n*., 86.
Stephanos 115.
Stieltjes 38.
Story 103.
Stratton 82.
Stolz 85.
Study 77, 116.
Suter 117.
Sylvester 24, 50, 53, 53 *n*.

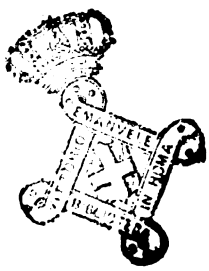
Talete 71, 95.
Tannery J. 57-60, 93, 128.
Tannery P 27, 28, 28 *n*., 29, 78, 80, 117, 128.
Tartaglia 79, 80.
Taylor 58, 60.
Teixeira 25-26.
Thiele 64.
Thieme 118.
Thomson W. 48.
Tonni-Bazza 81.
Torricelli 79.
Tortolini 63, 72.
Tropfke 12-14.
Trudi 72.
Tucci 72.
Turazza 72.

Vacca 46, 97.
Vailati 77, 80, 117.
Vaillant 62, 63.
Vega 63.
Veronese 86.
Vieta 95.
Vitale Giordano, 33-35, 75.
Vivanti 12, 22, 39-42, 53, 55, 57, 73, 80, 85, 107, 109.
de Vogué 8.
Voronoi 115-116.
de Vries 85.

Watt, 48.
Weber 117.
Weingarten 116, 123.
Weierstrass 25 *n*., 42, 52, 53 *n*., 60.
Wheatstone 48.
Wiedmann 95.
Wieleitner 96.
Wiener 96, 118.
Wilczynski 116.
Wilson 115.
Wiman 115.
Windelband 128.
Wirtinger 115.
Wronski 24.
Wu-wang 98.
Wyglie 98, 99.

Young 23.
Yu 98.

Zermelo 82.
Zeuthen 100, 117, 128.
Zindler 116.
Zobi 6 *n*., 7 *n*., 8 *n*.



Digitized by Google

Digitized by Google

TORINO - CARLO CLAUSEN - TORINO

GINO LORIA

Professore ordinario dell' Università di Genova

IL PASSATO ED IL PRESENTE

DELLE PRINCIPALI

TEORIE GEOMETRICHE

Seconda edizione accresciuta ed interamente rifatta

Lire 8.

INDICE:

CAP. I. — Sguardo alle origini ed allo sviluppo della geometria sin verso il 1850.
CAP. II. — Teoria delle curve piane algebriche.
CAP. IV. — Teoria delle curve algebriche a doppia curvatura.
CAP. V. — Geometria differenziale.
CAP. VI. — Ricerche intorno alla forma delle curve, delle superficie e di altre figure geometriche. Analysis situs. Configurazioni.
CAP. VII. — Geometria della retta nello spazio.
CAP. VIII. — Corrispondenze, rappresentazioni, trasformazioni.
CAP. IX. — Geometria numerativa.
CAP. X. — Geometria non-euclidea.
CAP. XI. — Geometria degli spazi a quantesivogliono dimensioni.
CAP. XII. — Epilogo.

GINO LORIA

ord. Professor d. höheren Geometrie an der Universität Genua

SPEZIELLE

algebraische und transscendente

EBENE KURVEN

THEORIE UND GESCHICHTE

Autorisierte, nach dem italienischen Manuskripte bearbeitete deutsche Ausgabe

von

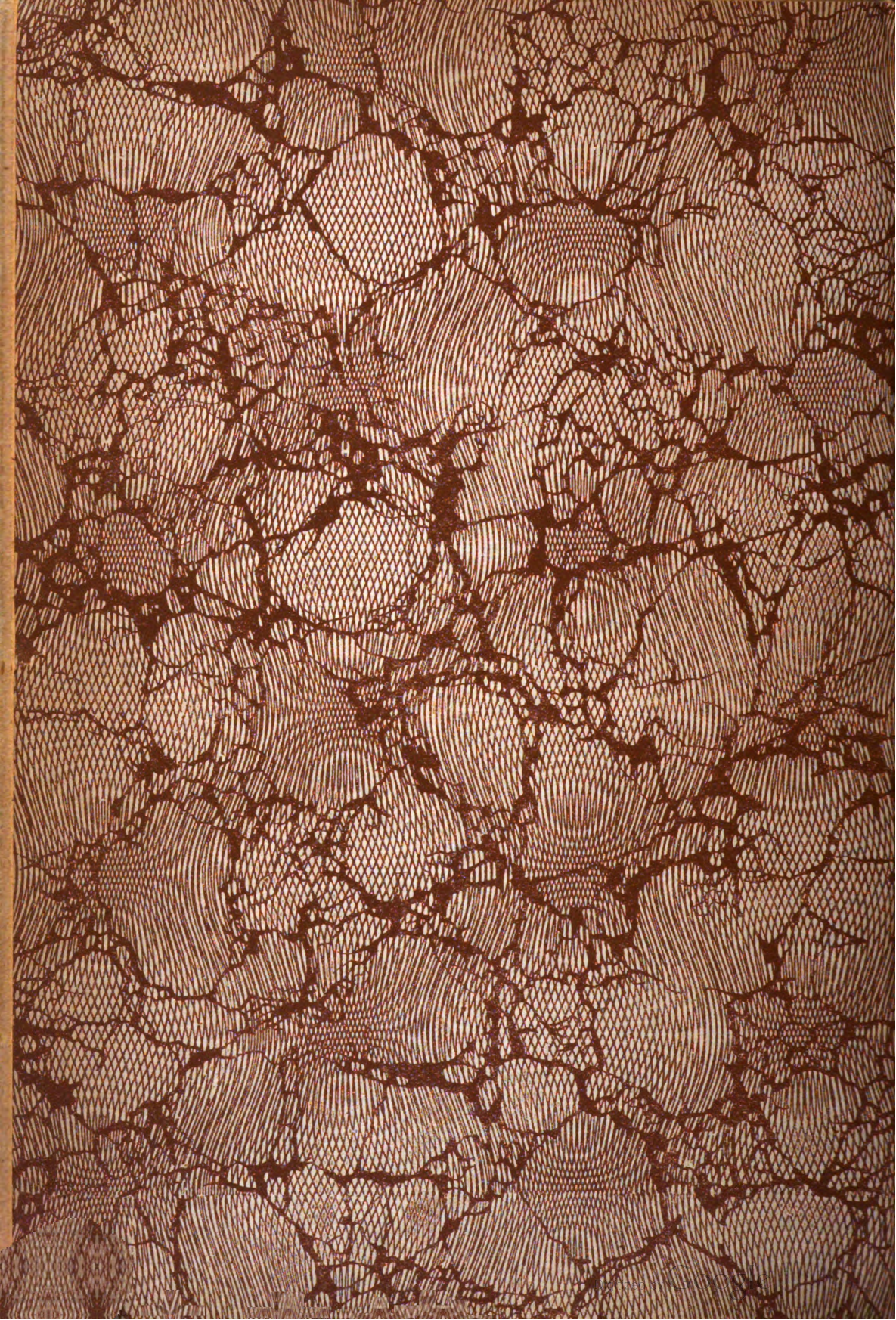
FRITZ SCHÜTTE

Mit 174 Figurem auf 17 lithographirten Tafeln

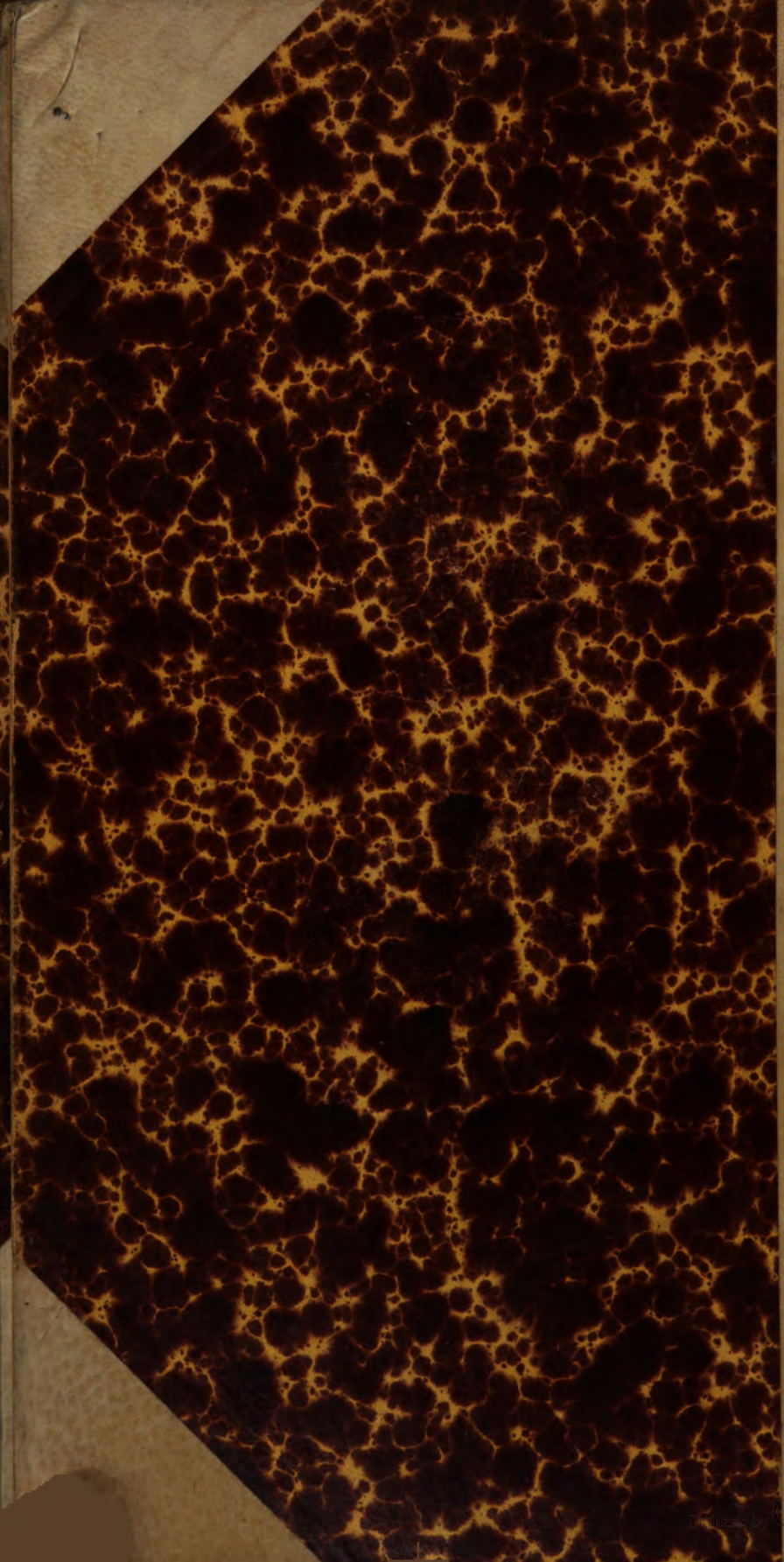
Mark 28.

Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google


Digitized by Google